

Гусак Л.П., Гулівата І.О.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
ПРАКТИКУМ

Вінниця 2018

УДК 517/519
Г 96

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Вінницького торговельно-економічного інституту
Київського національного торговельно-економічного університету
(Протокол № 10 від 18.10.2018 р.)*

Рецензенти: **Бондар М.В.**, к.пед.н., доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних систем Вінницького торговельно-економічного інституту КНТЕУ;
Панасенко О.Б., к.фіз.-мат.н., доцент кафедри алгебри та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;
Левчук О.В., к.пед.н., доцент кафедри математики, фізики та комп'ютерних технологій Вінницького національного аграрного університету

Гусак Л.П., Гулівата І.О. Вища та прикладна математика: практикум. Вінниця: Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 176 с.

Практикум містить завдання, методичні рекомендації та вказівки до їх виконання, тестові завдання для самоперевірки з кожної теми, передбаченої тематичним планом з дисципліни «Вища та прикладна математика».

УДК 517/519
Г 96

ISBN 978-966-629-866-2

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Завдання для практичних занять орієнтовані на ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач економіки, напрацювання навичок математичного дослідження прикладних проблем та умінь математичного формулювання економічних задач.

Метою курсу «Вища та прикладна математика» є формування у майбутніх бакалаврів математичного апарату, необхідного для розв'язання економічних задач, побудови економіко-математичних моделей економічних процесів і явищ, розвиток абстрактного та логічного мислення.

Курс «Вища та прикладна математика» базується на таких розділах: лінійна алгебра, векторна алгебра і аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, числові та степеневі ряди, теорія ймовірностей. Такий підхід надає можливість формування висококваліфікованих фахівців, які вміють ставити нові проблеми та розв'язувати їх, мають математичний стиль мислення, вміють аналізувати частинні випадки та знаходити загальні закономірності під час дослідження економічних процесів.

Завданням дисципліни «Вища та прикладна математика» є вивчення здобувачами вищої освіти фундаментальних математичних понять та загальних математичних законів з метою одержання необхідних знань і основних навичок побудови найбільш розповсюджених математичних моделей економічних систем; розвиток аналітичного, логічного, абстрактного мислення студентів, цілеспрямованої роботи над вивченням спеціальної літератури.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен знати: основи математичного апарату, необхідного для опанування теоретичних положень та розв'язання теоретичних та практичних економічних задач; алгоритми розв'язку основних задач; прийоми математичної формалізації умов економічних процесів; основні методи математичного моделювання з метою дослідження економічних процесів.

Компетенції, які слід розвинути у студента: вміння застосовувати математичні знання під час розв'язання економічних задач та обирати найбільш ефективні методи їх розв'язування; зіставляти та узагальнювати інформацію, робити власні висновки, володіти математичними методами дослідження економічних процесів; здатність володіти навчальним матеріалом, основними прийомами та методами побудови економіко-математичних моделей з метою застосування теоретичних знань на практиці в майбутній професійній діяльності; вміння застосовувати математичний апарат до економічних розрахунків, зокрема визначення попиту і пропозиції, під час дослідження виробничої функції, тощо; вміння застосовувати математичні методи розв'язування оптимізаційних задач для вирішення конкретних економічних ситуацій, давати економічну інтерпретацію отриманому розв'язку з метою прийняття управлінських рішень.

2. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» денної форми навчання

Назва теми	Кількість годин				Форми контролю
	Усього годин	з них			
		лекції	практичні заняття	самостійна робота	
1	2	3	4	5	6
I семестр					
Тема 1. Матриці та операції над ними	8	2	2	4	ІЗ, Т
Тема 2. Визначники та їх властивості	10	2	2	6	УО, ПО
Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	12	2	4	6	УО, КТ
Тема 4. Застосування методів лінійної алгебри у задачах економіки	6	2		4	ІЗ
Тема 5. Елементи векторної алгебри	8	2	2	4	Т, УО
Тема 6. Пряма на площині	8	2	2	4	ПО
Тема 7. Пряма та площина у просторі	8	2	2	4	УО, КТ
Тема 8. Елементи теорії множин	8	2		6	ІЗ
Тема 9. Функції однієї змінної	18	4	4	10	ІЗ, ПО
Тема 10. Похідна функції однієї змінної.	12	4	2	6	УО, Т
Тема 11. Диференціал функції однієї змінної. Основні теореми диференціального числення	8	2	2	4	ПО, ІЗ
Тема 12. Функції багатьох змінних	8	2	2	4	Т
Тема 13. Дослідження функцій за допомогою похідних	8	2	2	4	ІЗ, УО
Тема 14. Застосування похідної в економічних розрахунках	6			6	ІЗ
Тема 15. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування	8	2	4	2	УО, ІЗ
Тема 16. Інтегрування раціональних дробів	8	2	2	4	Т, УО

1	2	3	4	5	6
Тема 17. Інтегрування ірраціональних дробів	8	2	2	4	ПО
Тема 18. Інтегрування тригонометричних виразів	8	2	2	4	УО
Тема 19. Визначений інтеграл	12	2	4	6	Т, УО
Тема 20. Застосування визначеного інтеграла	8	2	2	4	ІЗ
Разом I семестр	180	42	42	96	
Підсумковий контроль знань					екзамен
II семестр					
Тема 21. Диференціальні рівняння першого порядку	28	8	8	12	УО, ІЗ
Тема 22. Диференціальні рівняння другого порядку	28	6	6	16	КТ, ІЗ
Тема 23. Числові ряди	14	2	2	10	ПО, ІЗ
Тема 24. Степеневі ряди	14	2	2	10	ІЗ, Т
Тема 25. Основні поняття теорії ймовірностей	12	2	2	8	КТ, УО
Тема 26. Основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них	14	2	2	10	ІЗ, Т
Тема 27. Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі	14	2	2	10	ПО
Тема 28. Дискретні випадкові величини	14	2	2	10	УО, КТ
Тема 29. Неперервні випадкові величини	14	2	2	10	ІЗ, ПО
Тема 30. Основні закони розподілу випадкових величин	16	4	4	8	Т, УО
Тема 31. Граничні теореми теорії ймовірностей	12	2	2	8	ІЗ
Разом II семестр	180	34	34	112	
Підсумковий контроль знань					екзамен
Всього	360	76	76	208	

Умовні позначення:

ПО - письмове опитування; УО - усне опитування; ІЗ - індивідуальне завдання;
КТ - комп'ютерне тестування; Т – тестування.

3. ТЕМАТИКА ТА КОНКРЕТНИЙ ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Матриці та операції над ними

Практичне заняття №1

План

1. Додавання матриць. Множення матриці на число.
2. Множення матриць. Транспонування матриць.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити матрицю $X = A \cdot B - \lambda \cdot D$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = 3.$$

☺ Крок 1

Добуток $A \cdot B$ можна утворити, оскільки матриця A має розмірність 2×4 , а матриця B - розмірність 4×3 . Матриця $C = AB$ матиме розмірність 2×3 .

Щоб знайти елемент C_{11} , утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B , отримаємо:
 $C_{11} = 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -11$.

Аналогічно: $C_{12} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 11$ (перший рядок на другий стовпець),

$$C_{13} = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) = -4 \text{ (перший рядок на третій стовпець),}$$

$$C_{21} = (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 19 \text{ (другий рядок на перший стовпець),}$$

$$C_{22} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0 \text{ (другий рядок на другий стовпець),}$$

$$C_{23} = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = -8 \text{ (другий рядок на третій стовпець).}$$

$$\text{Отже, } C = AB = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Крок 2

Обчислимо матрицю $S = \lambda \cdot D$, помноживши кожен елемент матриці D на число $\lambda = 3$, отримаємо: $S = \begin{pmatrix} 21 & 6 & 12 \\ -15 & 24 & -9 \end{pmatrix}$.

Крок 3

Обчислимо матрицю $X = A \cdot B - \lambda \cdot D$, отримаємо:

$$X = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 6 & 12 \\ -15 & 24 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 5 & -16 \\ 34 & -24 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } X = \begin{pmatrix} -32 & 5 & -16 \\ 34 & -24 & 1 \end{pmatrix}. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2.

Виконати транспонування матриць а) $A = \begin{pmatrix} -32 & 5 & -16 \\ 34 & -24 & 1 \end{pmatrix}$, б) $B = (2 \ 0 \ -1 \ 4)$,

в) $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, г) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

☺ а) Знайдемо матрицю транспоновану до А: $A^T = \begin{pmatrix} -32 & 34 \\ 5 & -24 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}$.

б) Знайдемо матрицю транспоновану до В: $B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

в) Знайдемо матрицю транспоновану до С: $C^T = (-2 \ 4 \ 5)$.

г) Знайдемо матрицю транспоновану до D: $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання №1. Обчислити матрицю $X = A \cdot B - \lambda \cdot D$, якщо

01. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

02. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & -5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 5$.

03. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ -1 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 6$.

04. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$.

05. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 8$.

06. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 9$.
07. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 10$.
08. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 11$.
09. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 12$.
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 13$.
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -13$.
12. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -12$.
13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -11$.
14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -10$.
15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -9$.
16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -8$.

$$17. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -7.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -6.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ -1 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -5.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & -5 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -4.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -3.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = -2.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 4.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & -5 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 6.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 8.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 10.$$

28. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 5$.

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 7 & -7 & 1 \\ 8 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$?

а) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$?

а) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ є матриця:

а) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. Яка з матриць є одиничною?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Визначники та їх властивості

Практичне заняття №2

План

1. Обчислення визначників другого та третього порядку. Способи обчислення визначників.
2. Властивості визначників. Визначник n -го порядку.
3. Знаходження оберненої матриці.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити визначник за правилом трикутників.

😊

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

😊😊

Приклад 2. Обчислити визначник за правилом Саррюса.

$$\begin{aligned} \text{😊} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0(-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - \\ &- (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0. \end{aligned} \text{😊😊}$$

Приклад 3. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

😊Розкладемо визначник, наприклад, за елементами першого рядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, тепер потрібно обчислити три визначники третього порядку, оскільки визначник, який входить до третього доданка, обчислювати не потрібно. Зрозуміло, що чим більше нулів маємо в рядку або стовпці, за елементами якого утворюється алгебраїчна сума, тим менше визначників $(n-1)$ -го порядку потрібно обчислювати. 😊😊

Приклад 4. Обчислимо визначник із **Прикладу 3**, використовуючи властивості визначників.

😊Утворимо в одному зі стовпців визначника Δ , наприклад в останньому, нулі. Якщо нулі утворюються в стовпці, використовуються елементи рядків, а якщо нулі утворюються в рядках, то навпаки — елементи стовпців.

У четвертому стовпці є дві одиниці, одну з них візьмемо як *розв'язувальний елемент* і на підставі властивостей виконаємо перетворення:

1) елементи третього (робочого) рядка перепишемо у перетворюваний визначник без змін;

2) помножимо всі елементи третього рядка на -3 , додамо до відповідних елементів першого рядка, а результат запишемо в перший рядок;

3) помножимо всі елементи третього рядка на -1 , додамо до відповідних елементів другого рядка, а результат запишемо у другий рядок;

4) помножимо всі елементи третього рядка на -2 , додамо до відповідних елементів четвертого рядка, а результат запишемо в четвертий рядок.

Після цих перетворень значення визначника не зміниться, але він набере такого вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер, скориставшись означенням визначника і розклавши його за елементами четвертого стовпця, дістанемо:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Тепер обчислення визначника четвертого порядку звелось до обчислення одного визначника третього порядку. Його можна обчислити за означенням, а можна знову утворити нулі, скажімо, у другому рядку, скориставшись одиницею як розв'язувальним елементом, дістанемо:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 7 & -4 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 18 = 14. \text{😊😊}$$

Зрозуміло, що за такою схемою можна обчислити визначник будь-якого порядку.

Приклад 5. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

😊Крок 1. Обчислимо визначник матриці A :

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$$

$\Delta(A) \neq 0$ - обернена матриця існує.

Крок 2. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Крок 3. Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Переконаємося, що матриця A^{-1} , побудована нами, справді є оберненою до матриці A . Знайдемо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання №1. Обчислити визначники другого порядку

01. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ -23 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -17 & 13 \\ -5 & 24 \end{vmatrix}.$

02. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 36 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -27 & 8 \\ 15 & -4 \end{vmatrix}.$

03. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 13 \\ 5 & 34 \end{vmatrix}.$

04. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -3 & 12 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 15 & 24 \end{vmatrix}.$

05. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 33 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 15 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}.$

06. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 16 \\ -3 & 11 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 13 \\ 5 & -27 \end{vmatrix}.$

07. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 13 \\ 5 & -14 \end{vmatrix}.$

08. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 26 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 18 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}.$

09. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -27 & 13 \\ -5 & 14 \end{vmatrix}.$

10. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & 13 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}.$

11. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -14 & 13 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}.$

16. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -23 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 24 & -4 \end{vmatrix}.$

17. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 78 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 18 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}.$

18. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 47 & -16 \\ 23 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$

19. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 23 & 13 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$

20. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 59 & 16 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 5 & 24 \end{vmatrix}.$

21. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 46 & 16 \\ -13 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 37 & 13 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$

22. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 23 & 16 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 13 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}.$

23. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 23 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 29 & 13 \\ 12 & -4 \end{vmatrix}.$

24. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -34 & 16 \\ -23 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 45 & 16 \\ -3 & -17 \end{vmatrix}.$

25. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 26 & 18 \\ 43 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 61 & -13 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}.$

26. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -3 & 19 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 54 & 13 \\ 5 & -27 \end{vmatrix}.$

$$12. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 48 & 6 \\ -3 & 19 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 31 & 47 \\ -5 & 24 \end{vmatrix}.$$

$$13. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 27 & 16 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 13 \\ -45 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$14. \Delta_1 = \begin{vmatrix} -28 & 16 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 37 & 43 \\ 26 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$15. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 39 & 16 \\ -3 & -17 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -37 & 13 \\ 26 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$27. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -16 \\ -3 & 23 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 35 & 13 \\ 53 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$28. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ -3 & -29 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 5 & 34 \end{vmatrix}.$$

$$29. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 38 & -51 \\ -23 & 9 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 25 \\ 47 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$30. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 65 & -16 \\ 23 & 91 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -27 & 13 \\ 15 & -64 \end{vmatrix}.$$

Завдання №2 Обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників.

$$01. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$08. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$16. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$24. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$02. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$09. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$17. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$25. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$03. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$10. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$18. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$26. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$04. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$11. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$19. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$27. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$05. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$12. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$20. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$28. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$06. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$13. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$21. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$29. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$07. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$14. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$22. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$30. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$15. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$23. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Завдання №3. Обчислити визначник третього за правилом Саррюса

01. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	08. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	16. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	24. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -7 & 5 \end{vmatrix}$
02. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	09. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$	17. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$	25. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$
03. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	10. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	18. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	26. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$
04. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	11. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	19. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$	27. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$
05. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	12. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -7 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	20. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	28. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -7 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
06. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	13. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	21. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	29. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$
07. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	14. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$	22. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$	30. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$
	15. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$	23. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$	

Завдання №4 Обчислити визначник четвертого порядку.

01. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	08. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	16. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	24. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
--	--	--	--

2. Визначник 3-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$:

- а) 0; б) 45; в) 38; г) -38.

3. Визначник 4-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$:

- а) -234; б) 234; в) 200; г) -200.

4. Мінор M_{32} визначника 3-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$:

- а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

5. При транспортуванні визначника його значення:

- а) не змінюється; б) змінюється на протилежний;
в) збільшується в два рази; г) дорівнює нулю.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Практичне заняття №3

План

- Сумісні та несумісні, визначені та невизначені системи рівнянь.
- Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дослідити систему рівнянь на сумісність та визначити кількість

розв'язків, якщо вона сумісна
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 5, \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 11. \end{cases}$$

☺ Знайдемо ранги основної та розширеної матриці системи методом елементарних перетворень.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & -8 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 8 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 8 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 9 \\ 0 & -23 & 0 & -13 \\ 0 & -25 & 0 & -25 \end{array} \right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

Опишемо послідовність елементарних перетворень:

- Переставимо місцями другий та перший рядки розширеної матриці.
- Помножимо перший рядок на 3 і віднімемо від другого, помножимо перший рядок на 4 і віднімемо від третього.

3) Переставимо місцями другий та третій стовпці розширеної матриці системи, поділимо третій рядок на -25.

4) Помножимо третій рядок на 23 і додамо до нього другий.

Серед мінорів основної матриці системи існує мінор другого порядку відмінний від нуля $M = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & -23 \end{vmatrix} = -46$. Отже, $r(A)=2$.

Розширена матриця системи має відмінний від нуля мінор третього порядку

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 9 \\ 0 & -23 & -13 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -460. \text{ Отже, } r(\bar{A}) = 3.$$

Оскільки $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система рівнянь несутісна. ☺ ☺

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

☺Складемо таблицю

$$A_0: \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 6 & \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

Від другого рядка віднімемо перший.

Перший рядок помножимо на 2 і віднімемо від третього рядка.

Дістанемо таблицю:

$$A_1: \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 6 & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 8 & -11 \end{array}$$

Другий рядок помножимо на 3 і додамо до третього рядка:

$$A_2: \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 6 & \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}$$

Поділивши останнє рівняння на 14, дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Послідовно знайдемо: $x_3 = -1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання №1 Дослідити систему рівнянь на сумісність та визначити кількість розв'язків, якщо вона сумісна.

- | | | |
|---|---|--|
| 01. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$ | 02. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ | 03. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ |
| 04. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$ | 05. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$ | 06. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$ |
| 07. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3; \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$ | 08. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$ | 09. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5; \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -6. \end{cases}$ |
| 10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 + 2x_3 = 6. \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ |
| 16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 = -2. \end{cases}$ | 17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ |
| 19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$ | 21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ -3x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$ |
| 22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_3 = 3. \end{cases}$ | 23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ | 24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ |
| 25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ | 26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_3 = 1. \end{cases}$ | 27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ |
| 28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$ | 29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$ | 30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$ |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Розв'язавши систему лінійних рівнянь методом Гауса, отримаємо:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -9; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -25. \end{cases}$$

а) (1;1;1); б) (2;-3;1); в) (-1;-3;-2); г) (-1;-3;2).

2. Розв'язавши систему лінійних рівнянь методом Гауса отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

а) (1;-1;2); б) (-1;1;3); в) (-2;3;1); г) (-1;-1;3).

3. Система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка не має розв'язків називається:

а) нульовою; б) невизначеною;
в) несумісною; г) неоднорідною.

4. Система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці. Це теорема:

а) Йордана-Гаусса; б) Больцано-Коші;
в) Кронекера - Капеллі; г) Ньютона-Лейбніца.

5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними, якщо:

а) їх розв'язки співпадають; б) їх розв'язки дорівнюють нулю;
в) їх розв'язки різні; г) їх розв'язки відсутні.

Практичне заняття №4

План

1. Застосування формул Крамера до розв'язування систем лінійних рівнянь.
2. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.
3. Метод послідовного виключення невідомих.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

☺Обчислимо визначник цієї системи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначник системи відмінний від нуля. Знайдемо тепер визначник $D_k (k = 1, 2, 3)$ і розв'язки системи рівнянь:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4; \quad \text{☺☺}$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{4}{4} = 1. \bullet$$

Приклад 2. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

☺Обчислимо:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5. \quad \Delta(A) \neq 0 - \text{обернена матриця існує.}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1} , побудована нами, справді є оберненою до матриці A . Знайдемо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

☺Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю для матриці A . $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

Розв'яжемо матричне рівняння $X = A^{-1} \cdot A$, дістанемо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ - розв'язок системи. ☺☺

Приклад 4. Знайти розв'язок системи рівнянь методом Йордана-Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

☺ Утворимо відповідну таблицю коефіцієнтів:

$$A_0: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Поділивши перший рядок на 2, дістанемо таблицю:

$$A_1: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Перший рядок додаємо до другого. Далі помножимо перший рядок на 3 і віднімемо від третього рядка. Утворимо таблицю:

$$A_1: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}$$

Поділимо другий рядок на 7/2:

$$A_2: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}$$

Помножимо другий рядок на 1/2, віднімемо від першого рядка і додаємо до третього. Дістанемо:

$$A_3: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{array}$$

Поділивши третій рядок на $4/7$, запишемо:

$$A_4: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Помножимо третій рядок на $4/7$ і віднімемо від першого рядка. Далі помножимо третій рядок на $1/7$ і додаємо до другого, утворивши заключну таблицю:

$$A_0: \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Отже, розв'язок системи $x_1=1, x_2=1, x_3=1$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання №1. Розв'язати систему рівнянь записану у матричній формі $AX=B$,

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: а) за допомогою оберненої матриці; б) за формулами Крамера;

в) методом Йордана-Гауса.

01. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$

02. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$

03. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$

$$04. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$05. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$06. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$07. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$08. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$09. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Формули Крамера для розв'язування системи лінійних рівнянь мають вигляд:

а) $x_i = \frac{\Delta}{\Delta x_i}$; б) $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$; в) $\Delta x_i = \frac{\Delta}{\Delta x_i}$; г) $\Delta = \frac{x_i}{\Delta x_i}$.

2. Розв'язавши систему лінійних рівнянь методом Крамера, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

а) (7;-3;4); б) (1;1;1); в) $(-\frac{13}{7}; \frac{2}{7}; -\frac{21}{7})$; г) (1;0;2).

3. Розв'язавши систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці,

отримаємо: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

а) (1;1;2); б) (1;-2;-1); в) (4;6;0); г) (1;2;1).

4. Добутком матриць A та A^{-1} є:

а) діагональна матриця; б) одинична матриця;
в) нульова матриця; г) транспонована матриця.

5. Обернена матриця до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ має вигляд:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 5 & 10 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 13 & 1 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) матриця оберненої не має.

Тема 5. Елементи векторної алгебри

Практичне заняття №5

План

1. Додавання та віднімання векторів. Множення вектора на число.
2. Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів.
3. Розкладання вектора за базисними векторами.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дано точки $B(7,5,2)$, $C(-4,7,3)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{BC}$ його довжину та координати його середини.

☺ Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BC} = (-4-7; 7-5; 3-2) = (-11; -2; 1)$.

Довжина вектора $|\overrightarrow{BC}|$, або його абсолютна величина дорівнює $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{126}$ лін.од.

Визначимо координати середини відрізка BC - точки $M(x, y, z)$.

$$x = \frac{7-4}{2} = 1; \quad y = \frac{5+7}{2} = 6; \quad z_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5 \quad M(1; 6; 2,5) \quad \text{☺☺}$$

Відповідь: $(-11; -2; 1)$, $\sqrt{126}$ лін.од., $M(1; 6; 2,5)$.

Приклад 2. Дано точки $A(4, 1, 1)$, $B(7, 5, 2)$, $C(-4, 7, 3)$. Знайти довжину відрізків BC , AB , AC та координати точок M_1 , M_2 , M_3 , якщо відоме відношення поділу відрізків BC , AB , AC цими точками $\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{1}{2}$; $\frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{2}{3}$; $\frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{1}{3}$

☺ Знайдемо довжину відрізків AB , BC і AC за формулами

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}, \quad BC = \sqrt{(-4-7)^2 + (7-5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{126},$$

$$AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{104}.$$

Скориставшись формулами, знайдемо відповідно координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

$$x_1 = \frac{7-4 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \quad y_1 = \frac{5+7 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{3}; \quad z_1 = \frac{2+\frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3} \quad M_1\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}; \frac{7}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4+7 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{26}{5}; \quad y_2 = \frac{1+5 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{13}{5}; \quad z_2 = \frac{1+\frac{2}{3} \cdot 2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7}{5} \quad M_2\left(\frac{26}{5}; \frac{13}{5}; \frac{7}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4-4 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 2; \quad y_3 = \frac{1+7 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad z_3 = \frac{1+3 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \quad M_3\left(2; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right). \quad \text{☺☺}$$

Відповідь: $\sqrt{26}$, $\sqrt{126}$, $\sqrt{104}$, $M_1\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}; \frac{7}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{26}{5}; \frac{13}{5}; \frac{7}{5}\right)$, $M_3\left(2; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Приклад 3. Знайти скалярний добуток векторів: $\vec{a}(-3; 0; 1)$ і $\vec{b}(4; 1; 1)$.

$$\text{☺ } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-3; 0; 1) \cdot (4; 1; 1) = -3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -11. \quad \text{☺☺}$$

Відповідь: -11.

Приклад 4. Дано три точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ і $C(2, 1, 2)$. Знайти кут $\varphi = \angle BAC$.

☺Знайдемо вектори $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (1, 0, 1)$. Згідно з формулою маємо:

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60^\circ. \text{ ☺☺}$$

Відповідь: $\varphi = 60^\circ$.

Приклад 5. У просторі задано чотири точки $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 4)$, $C(3, 5, 5)$, $D(2, 4, 7)$. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

☺З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\vec{AB} = (3, 3, 3), \vec{AC} = (2, 4, 4), \vec{AD} = (1, 3, 6);$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{AB} \left(\vec{AC} \cdot \vec{AD} \right) \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од. } \text{ ☺☺}$$

Відповідь: 3 куб. од.

Приклад 6. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = (5, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$ як на сторонах.

☺Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається як половина площі паралелограма.

$$S_{\Delta} = \frac{2\sqrt{74}}{2} = \sqrt{74} \text{ кв. од. } \text{ ☺☺}$$

Відповідь: $\sqrt{74}$ кв. од.

Приклад 7. Знайти координати вектора $\vec{a}(3;5;-2)$ у базисі

$\vec{AB}(-2;1;0)$, $\vec{AC}(1;3;-2)$, $\vec{AD}(1;-2;1)$.

Зауваження!!! Щоб знайти координати вектора у базисі, потрібно записати розклад цього вектора за базисними векторами з невідомими коефіцієнтами для кожної координати і розв'язати одержану систему рівнянь.

$$\text{☺} \vec{a} = \alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AC} + \gamma \cdot \vec{AD}.$$

$$(3;5;-2) = \alpha \cdot (-2;1;0) + \beta \cdot (1;3;-2) + \gamma \cdot (1;-2;1).$$

$$\begin{cases} 3 = -2\alpha + \beta + \gamma; \\ 5 = \alpha + 3\beta - 2\gamma; \\ -2 = -2\beta + \gamma. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8; \\ \beta = 7; \\ \gamma = 12. \end{cases}$$

Отже, розклад $\vec{a}(3;5;-2)$ у базисі $\vec{AB}(-2;1;0)$, $\vec{AC}(1;3;-2)$, $\vec{AD}(1;-2;1)$ має вигляд $\vec{a} = 8\vec{AB} + 7\vec{AC} + 12\vec{AD}$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання. Дано координати вершин трикутної піраміди. Знайти:

- координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ та їх модулі;
- координати вектора $2\vec{AC} + 3\vec{AB} - \vec{AD}$;
- координати медіани DM грані DBC ;
- координати точки X відрізка CB , якщо точка X ділить відрізок у відношенні $\frac{|CX|}{|XB|} = \frac{2}{3}$.
- величину $\angle A$ грані ABC ;
- скалярний добуток векторів $\vec{AC}$, $\vec{AB}$;
- площу грані ABC ;
- об'єм піраміди $ABCD$.
- координати вектора $\vec{a} = 2\vec{DM}$ у базисі $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

- $A(-5;2;-3)$, $B(-4;4;-5)$, $C(6;12;-1)$, $D(3;10;1)$.
- $A(-1;-4;-1)$, $B(0;-2;-3)$, $C(10;6;1)$, $D(7;4;3)$.
- $A(0;-2;1)$, $B(1;0;-1)$, $C(11;8;3)$, $D(8;6;5)$.
- $A(2;-1;8)$, $B(-4;0;6)$, $C(0;10;-2)$, $D(2;7;0)$.
- $A(-2;1;0)$, $B(-1;3;-2)$, $C(9;11;2)$, $D(6;9;4)$.
- $A(1;-3;3)$, $B(5;-5;7)$, $C(3;-13;14)$, $D(1;-2;5)$.
- $A(3;3;4)$, $B(7;1;8)$, $C(5;-7;15)$, $D(3;4;6)$.
- $A(2;-5;1)$, $B(6;-7;5)$, $C(4;-15;12)$, $D(2;-4;3)$.
- $A(4;0;-4)$, $B(8;-2;0)$, $C(6;-10;7)$, $D(4;1;-2)$.
- $A(-3;2;4)$, $B(1;6;2)$, $C(8;4;-6)$, $D(-1;2;5)$.
- $A(-3;4;-3)$, $B(-2;2;-1)$, $C(8;6;7)$, $D(5;8;5)$.
- $A(-2;-3;2)$, $B(-1;-5;4)$, $C(9;-1;12)$, $D(6;1;10)$.
- $A(-4;5;-5)$, $B(-3;3;-3)$, $C(7;7;5)$, $D(4;9;3)$.
- $A(2;-1;-4)$, $B(3;-3;-2)$, $C(13;11;6)$, $D(10;3;4)$.
- $A(-8;3;-1)$, $B(-7;1;1)$, $C(3;5;9)$, $D(0;0;7)$.
- $A(3;1;-2)$, $B(4;-1;0)$, $C(14;3;8)$, $D(11;5;6)$.
- $A(0;2;-10)$, $B(1;0;-8)$, $C(11;4;0)$, $D(8;6;-2)$.
- $A(-1;-2;-8)$, $B(0;-4;-6)$, $C(10;0;2)$, $D(7;2;0)$.
- $A(1;-4;0)$, $B(2;-6;2)$, $C(12;-2;10)$, $D(9;0;8)$.
- $A(-5;0;1)$, $B(-4;-2;3)$, $C(6;2;11)$, $D(3;4;9)$.
- $A(4;-2;5)$, $B(8;2;3)$, $C(6;9;-5)$, $D(4;0;6)$.

22. $A(3;3;-3)$, $B(7;7;-8)$, $C(5;14;-13)$, $D(3;5;-2)$.
 23. $A(-2;0;-2)$, $B(2;4;-4)$, $C(0;11;-12)$, $D(-2;2;-1)$.
 24. $A(0;4;3)$, $B(4;8;1)$, $C(2;15;-7)$, $D(0;6;4)$.
 25. $A(-4;2;-1)$, $B(0;6;-3)$, $C(-2;13;-11)$, $D(-4;4;0)$.
 26. $A(-1;1;-5)$, $B(3;5;-7)$, $C(1;12;-15)$, $D(-1;3;-4)$.
 27. $A(-3;-6;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(-1;5;-8)$, $D(3;-4;3)$.
 28. $A(1;-4;0)$, $B(5;0;-2)$, $C(3;7;-10)$, $D(1;-2;1)$.
 29. $A(5;-1;-4)$, $B(9;3;-6)$, $C(7;10;-14)$, $D(5;1;-3)$.
 30. $A(1;-4;0)$, $B(2;-6;2)$, $C(12;-2;10)$, $D(9;0;8)$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Відомо, що $\vec{a} = 3$, $\vec{b} = 8$, кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайшовши скалярний добуток цих векторів та площину S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, отримаємо: а) $15\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{8}$.
 2. Друга координата вектора $\vec{c}$, колінеарного до вектора $\vec{a} = (2;1;3)$ і такого, що $\vec{a} \cdot \vec{c} = 14$, дорівнює: а) 2; б) 1; в) 3; г) 4.
 3. При яких значеннях t вектори $\vec{c} = (t-5;2;4)$ і $\vec{d} = (t;t-1;-2)$ будуть перпендикулярними? а) -5;2; б) 2;0; в) 3;5; г) -3;4.
 4. Дано $\vec{a} = (2;x;-3)$ і $\vec{b} = (x;-3;-5)$. При яких x $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$? а) 5; б) 3; в) -5; г) -3.
 5. Обчисливши площу трикутника побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\sqrt{2}$, $\vec{b} = \frac{1}{3}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, отримаємо:
 а) 1; б) 2,5; в) 0,5; г) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Тема 6. Пряма на площині

Практичне заняття №6

План

1. Види рівнянь прямої.
2. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Визначити параметри k і b для кожної з прямих: а) $2x-3y=6$, б) $y=-3$, в) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

☺а) Перетворимо дане рівняння у рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Для цього перенесемо $2x$ в праву частину рівняння і поділимо обидві частини рівності на -3, отримаємо $y = \frac{2}{3}x - 2$. Звідси $k = \frac{2}{3}$, $b = -2$.

б) Це є рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, тому $k=0$, $b=-3$.

в) Перенесемо 1 вліво, зведемо до спільного знаменника і отримаємо загальне рівняння прямої $3x+4y-12=0$. Тоді $k = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{C}{B} = -\frac{-12}{4} = 3$. ☺☺

Приклад 2. Дано рівняння прямих $3x+2y+4=0$. Написати:

а) рівняння з кутовим коефіцієнтом; б) рівняння прямої у відрізках на осях.

☺а) Розв'язавши рівняння прямої відносно y , отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $2y=-4-3x$, $y=-1,5x-2$. Тут $k=-1,5$, $b=-2$.

б) Перенесемо 4 вправо і поділимо обидві частини рівняння на -4 , отримаємо

$$\frac{3}{-4}x + \frac{1}{-2}y = 1. \text{ Звідси } -\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 1. \text{ ☺☺}$$

Приклад 3. Знайти кут між прямими: а) $5x-y+7=0$ і $2x-3y+1=0$; б) $2x+y=0$ і $y=3x-4$.

☺а) Використаємо формулу знаходження кута між прямими, які задані загальними рівняннями $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|$. Тоді $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1)}{5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)} \right| = 1$. Звідси

$$\varphi = \arctg 1 = 45^\circ.$$

б) Перше рівняння розв'яжемо відносно y . Отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=-2x$. Використаємо формулу знаходження кута між прямими з кутовими коефіцієнтами $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Тоді $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 + 2}{1 + 3 \cdot (-2)} = -1$. Звідси

$$\varphi = \arctg(-1) = 45^\circ. \text{ ☺☺}$$

Приклад 4. Дано пряму l : $-2x+y-1=0$ і точку $M(-1;2)$. Необхідно:

а) обчислити відстань $d(M,l)$ від точки M до прямої l ;

б) написати рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої l ;

☺а) Відстань від точки M до прямої l обчислимо за формулою $d(M,l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

б) Розв'язавши рівняння відносно y , отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=2x+1$. Використавши умову перпендикулярності двох прямих $k_1 \cdot k_2 = -1$, маємо $k_2 = -1/k_1 = -0,5$.

За формулою рівняння прямої, що проходить через задану точку, отримаємо:

$$y - 2 = (-0,5) \cdot (x + 1)$$

Звідси

$$x + 2y - 3 = 0,$$

а це і буде рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої l . ☺☺

Приклад 5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;3)$ і $B(4;-2)$.

☺ Використаємо рівняння прямої, що проходить через задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \text{ Отримаємо } \frac{x + 1}{4 + 1} = \frac{y - 3}{-2 - 3}, \text{ звідси } x + y - 2 = 0. \text{ ☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання. Дано вершини $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ трикутника ABC . Знайти:

- а) довжину сторони AB ;
- б) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини A ;
- в) рівняння медіани, проведеної через вершину A ;
- г) кут між медіаною і висотою, проведеними через вершину A ;
- д) відстань від вершини C до прямої AB ;
- е) площу трикутника.

- | | | |
|---|--|--|
| 01. $A(3;-1), B(-5;5), C(-4;0)$. | 11. $A(7;2), B(-1;8), C(0;3)$. | 21. $A(2;-6), B(-6;-2), C(4;10)$. |
| 02. $A(10;-1), B(2;5), C(3;0)$. | 12. $A(11;-3), B(3;3), C(4;-2)$. | 22. $A(7;4), B(19;-5), C(10;21)$. |
| 03. $A(9;1), B(1;7), C(2;2)$. | 13. $A(13;-2), B(5;4), C(6;-1)$. | 23. $A(11;-12), B(-8;11), C(12;-6)$. |
| 04. $A(4;-2), B(-4;4), C(-3;1)$. | 14. $A(12;2), B(4;6), C(5;3)$. | 24. $A(8;-1), B(-7;3), C(2;-3)$. |
| 05. $A(5;1), B(-3;7), C(-2;2)$. | 15. $A(10;3), B(4;9), C(6;2)$. | 25. $A(-8;3), B(8;6), C(-1;11)$. |
| 06. $A(9;3), B(-2;-3), C(-6;0)$. | 16. $A(-7;5), B(12;-3), C(-3;11)$. | 26. $A(11;2), B(3;9), C(8;2)$. |
| 07. $A(2;10), B(-7;8), C(2;-6)$. | 17. $A(9;1), B(2;8), C(3;2)$. | 27. $A(12;4), B(5;12), C(7;-2)$. |
| 08. $A(12;1), B(-6;-3), C(8;-4)$. | 18. $A(3;3), B(6;9), C(1;7)$. | 28. $A(3;4), B(2;-1), C(-2;3)$. |
| 09. $A(13;4), B(6;10), C(7;5)$. | 19. $A(4;10), B(-6;8), C(2;-4)$. | 29. $A(6;3), B(-2;9), C(-1;4)$. |
| 10. $A(9;-3), B(5;5), C(6;-2)$. | 20. $A(-4;6), B(8;5), C(4;-6)$. | 30. $A(2;8), B(-3;1), C(8;-2)$. |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Відстань між паралельними прямими $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ і $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$ становить:

- а) 5,5; б) 5; в) $\frac{5}{13}$; г) 55.

2. Рівняння прямої $5x - 4y + 20 = 0$ у відрізках на осях має вигляд:

- а) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1$; б) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$; в) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$; г) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = -1$.

3. Параметричне рівняння прямої, якщо $A(3;-5;2)$ та $B(1;-1;-4)$, має вигляд:

- а) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -5 - 2t, \\ z = 2 + 3t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -5 + 2t, \\ z = 2 - 3t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -5 - 2t, \\ z = 2 - 3t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -5 + t, \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

4. Довжина сторони AB , якщо $A(2;6)$ і $B(-2;0)$, становить:

- а) $2\sqrt{13}$; б) $3\sqrt{12}$; в) $2\sqrt{12}$; г) $3\sqrt{13}$.

5. Кут при вершині A , якщо $A(-2;1)$, $B(-2;0)$, $C(1;-3)$, дорівнює:

- а) $\varphi = \arccos \frac{19}{5\sqrt{26}}$; б) $\varphi = \arccos \frac{19}{5\sqrt{27}}$; в) $\varphi = \arccos \frac{19}{5\sqrt{24}}$; г) $\varphi = \arccos \frac{19}{5\sqrt{25}}$.

Тема 7. Пряма та площина у просторі

Практичне заняття №7

План

1. Види рівнянь площини, умови паралельності та перпендикулярності площин.
2. Відстань від точки до площини, кут між прямою і площиною.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Написати рівняння площин, що проходять:

- а) паралельно площині Oxz і через точку $(3, -4, 5)$;
- б) через вісь Oz і точку $(-4, 1, 0)$.

☺а) Рівняння шуканої площини $By + D = 0$, тому $y = -\frac{D}{B}$. Точка $(3, -4, 5)$ лежить в площині, тобто задовольняє рівнянню $-4 = -\frac{D}{B}$, тому маємо $y = -4$ або $y + 4 = 0$.

б) Рівняння шуканої площини $Ax + By = 0$ або $x + \frac{B}{A}y = 0$. Підставимо координати точки $(-4, 1, 0)$ в це рівняння $-4 + \frac{B}{A} = 0$, звідси $\frac{B}{A} = 4$, тому маємо $x + 4y = 0$. ☺☺

Приклад 2. Через точку $(2, 1, 6)$ провести пряму, перпендикулярну площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

☺Запишемо спочатку рівняння прямої, яка проходить через дану точку

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-6}{p}.$$

За формулою умови перпендикулярності прямої і площини числа m, n, p пропорційні числам A, B, C з рівняння площини, тому замінивши m, n, p на $1, -4, 5$, маємо

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-6}{5}. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 3. Знайти кут між прямими:

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}.$$

☺Зведемо до канонічного вигляду прямі (виражаємо x з кожного рівняння):

$$\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{6}.$$

Тоді кут між прямими обчислюємо за формулою

$$\cos \varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+9+36}} = \frac{20}{21} \approx 0,952.$$

Тому $\varphi = 17^\circ 48'$. ☺☺

Приклад 4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ та площини $2x + y + z - 6 = 0$.

☺ Шукані координати точки перетину (x,y,z) повинні задовольняти рівнянням прямої та площини.

Параметричними рівняннями заданої прямої будуть:

$$\frac{x-2}{1} = t \Rightarrow x = 2 + t, \quad \frac{y-3}{1} = t \Rightarrow y = 3 + t, \quad \frac{z-4}{2} = t \Rightarrow z = 4 + 2t.$$

Підставимо x, y, z в рівняння площини:

$$\begin{aligned} 2 + (2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 &= 0 \\ 5t + 5 &= 0 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Підставивши знайдене t в параметричні рівняння прямої, одержимо координати точки перетину: $x = 2 - 1 = 1, y = 3 - 1 = 2, z = 4 - 2 = 2$.

Отже, точка з координатами $(1,2,2)$ є точкою перетину заданих прямої та площини. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання. Дано чотири точки у просторі $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$ і $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Знайти:

- кут між прямими A_1A_2 і A_3A_4 ;
- площу трикутника $A_1A_2A_3$;
- рівняння площини, яка проходить через точки A_1, A_2, A_3 ;
- відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$;
- кут між площиною $A_1A_2A_3$ і прямою A_3A_4 .

1. $A_1(3; 1; 4),$	$A_2(-1; 6; 1),$	$A_3(-1; 1; 6),$	$A_4(0; 4; -1).$
2. $A_1(3; -1; 2),$	$A_2(-1; 0; 1),$	$A_3(1; 7; 3),$	$A_4(8; 5; 8).$
3. $A_1(3; 5; 4),$	$A_2(5; 8; 3),$	$A_3(1; 2; -2),$	$A_4(-1; 0; 2).$
4. $A_1(2; 4; 3),$	$A_2(1; 1; 5),$	$A_3(4; 9; 3),$	$A_4(3; 6; 7).$
5. $A_1(9; 5; 5),$	$A_2(-3; 7; 1),$	$A_3(5; 7; 8),$	$A_4(6; 9; 2).$
6. $A_1(0; 7; 1),$	$A_2(2; -1; 5),$	$A_3(1; 6; 3),$	$A_4(3; -9; 8).$
7. $A_1(5; 5; 4),$	$A_2(1; -1; 4),$	$A_3(3; 5; 1),$	$A_4(5; 8; -1).$
8. $A_1(6; 1; 1),$	$A_2(4; 6; 6),$	$A_3(4; 2; 0),$	$A_4(1; 2; 6).$
9. $A_1(7; 5; 3),$	$A_2(9; 4; 4),$	$A_3(4; 5; 7),$	$A_4(7; 9; 6).$
10. $A_1(6; 8; 2),$	$A_2(5; 4; 7),$	$A_3(2; 4; 7),$	$A_4(7; 3; 7).$
11. $A_1(4; 2; 5),$	$A_2(0; 7; 1),$	$A_3(0; 2; 7),$	$A_4(1; 5; 0).$
12. $A_1(4; 4; 10),$	$A_2(7; 10; 2),$	$A_3(2; 8; 4),$	$A_4(9; 6; 9).$
13. $A_1(4; 6; 5),$	$A_2(6; 9; 4),$	$A_3(2; 10; 10),$	$A_4(7; 5; 9).$
14. $A_1(3; 5; 4),$	$A_2(8; 7; 4),$	$A_3(5; 10; 4),$	$A_4(4; 7; 8).$
15. $A_1(10; 9; 6),$	$A_2(2; 8; 2),$	$A_3(9; 8; 9),$	$A_4(7; 10; 3).$
16. $A_1(1; 8; 2),$	$A_2(5; 2; 6),$	$A_3(5; 7; 4),$	$A_4(4; 10; 9).$
17. $A_1(6; 6; 5),$	$A_2(4; 9; 5),$	$A_3(4; 6; 11),$	$A_4(6; 9; 3).$
18. $A_1(7; 2; 2),$	$A_2(-5; 7; -7),$	$A_3(5; -3; 1),$	$A_4(2; 3; 7).$
19. $A_1(8; -6; 4),$	$A_2(10; 5; -5),$	$A_3(5; 6; -8),$	$A_4(8; 10; 7).$
20. $A_1(1; -1; 3),$	$A_2(6; 5; 8),$	$A_3(3; 5; 8),$	$A_4(8; 4; 1).$

21. $A_1(1; -2; 7),$	$A_2(4; 2; 10),$	$A_3(2; 3; 5),$	$A_4(5; 3; 7).$
22. $A_1(4; 2; 10),$	$A_2(1; 2; 0),$	$A_3(3; 5; 7),$	$A_4(2; -3; 5).$
23. $A_1(2; 3; 5),$	$A_2(5; 3; -7),$	$A_3(1; 2; 7),$	$A_4(4; 2; 0).$
24. $A_1(5; 3; 7),$	$A_2(-2; 3; 5),$	$A_3(4; 2; 10),$	$A_4(1; 2; 7).$
25. $A_1(4; 3; 5),$	$A_2(1; 9; 7),$	$A_3(0; 2; 0),$	$A_4(5; 3; 10).$
26. $A_1(3; 2; 5),$	$A_2(4; 0; 6),$	$A_3(2; 6; 5),$	$A_4(6; 4; -1).$
27. $A_1(2; 1; 6),$	$A_2(1; 4; 9),$	$A_3(2; -5; 8),$	$A_4(5; 4; 2).$
28. $A_1(2; 1; 7),$	$A_2(3; 3; 6),$	$A_3(2; -3; 9),$	$A_4(1; 2; 5).$
29. $A_1(2; -1; 7),$	$A_2(6; 3; 1),$	$A_3(3; 2; 8),$	$A_4(2; -3; 7).$
30. $A_1(0; 4; 5),$	$A_2(3; -2; 1),$	$A_3(4; 5; 6),$	$A_4(3; 3; 2).$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Точкою перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ та площини $2x + y + z - 8 = 0$ є:

- а) $M(3, -7, 5);$ б) $M(1, -2, 9);$ в) $M(1; \frac{8}{3}; \frac{10}{3});$ г) $M(\frac{4}{7}; 3; 2).$

2. Відстань від точки $A(2; 3; -1)$ до площини $7x + 6y - 6z + 42 = 0$ становить:

- а) $\frac{8}{12}$ од.; б) $\frac{3}{5}$ од.; в) $\frac{8}{11}$ од.; г) $\frac{11}{8}$ од.

3. Відстань між паралельними площинами $5x + 3y - 4z + 15 = 0;$ $15x + 9y - 12z - 5 = 0$ становить:

- а) $\frac{\sqrt{50}}{3}$ од.; б) $\frac{\sqrt{50}}{2}$ од.; в) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ од.; г) $\frac{\sqrt{50}}{5}$ од.

4. Рівняння площини, що проходить через точки $A(-1; 2; -3)$ і $N(1; 4; -5)$ перпендикулярно площині $3x + 5y - 6z + 1 = 0$ має вигляд:

- а) $x + 3y - 2z + 1 = 0;$ б) $x - 2y - 3z - 2 = 0;$ в) $x - 3y - 2z - 1 = 0;$ г) $x + y - 2z - 1 = 0.$

5. Гострий кут між двома площинами: $5x - 3y + 4z - 4 = 0,$ $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ дорівнює:

- а) $\varphi = \arcsin \frac{19\sqrt{53}}{290};$ б) $\varphi = \arccos \frac{19\sqrt{58}}{290};$ в) $\varphi = \arccos \frac{19\sqrt{73}}{290};$ г) $\varphi = \arccos \frac{19\sqrt{78}}{290}.$

Тема 9. Функції однієї змінної

Практичне заняття №8

План

1. Поняття границі функції в точці.
2. Розкриття невизначеностей, визначні границі.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Для знаходження границі треба у вираз функції підставити число, до якого прямує x . Якщо в результаті підстановки одержується число, то воно дорівнює границі функції, але, як правило, за такої підстановки одержують так

звану невизначеність вигляду: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , 0^∞ і т. п. Для розкриття невизначеності дещо перетворюють вираз функції, що стоїть під знаком границі, і використовують відповідні теореми теорії границь або визначні границі.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}$, якщо а) $x_0=4$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$.

☺а) Скориставшись теоремами про границі, підставимо у функцію замість змінної x її граничне значення $x_0=4$, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2 \cdot 4^2 + 4 - 6}{4^2 + 3 \cdot 4 + 2} = \frac{30}{30} = 1. \text{ ☺☺}$$

☺б) Безпосередня підстановка граничного значення $x_0=-2$ приводить нас до невизначеності виду $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$.

Зауваження 1! Для розкриття невизначеностей виду $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$ необхідно так перетворити вираз, щоб можна було скоротити дріб на деяку нескінченно малу величину або використати визначні границі.

Для розкриття цієї невизначеності, розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \cdot (-2) - 3}{-2 + 1} = -7. \text{ ☺☺}$$

☺в) При $x_0=\infty$, матимемо невизначеність виду $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$.

Зауваження 2! Для розкриття невизначеностей виду $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ необхідно спростити вираз шляхом ділення чисельника і знаменника на змінну в найбільшому степені.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{2}{1} = 2. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$.

☺Підстановка граничного значення приводить до невизначеності виду $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$.

Щоб розкрити цю невизначеність, помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника, тобто на $(1 + \sqrt{x+1})$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2} \text{ ☺☺}$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$.

☺Підстановка граничного значення приводить до невизначеності виду $\langle \infty - \infty \rangle$

Зауваження 3! Для розкриття невизначеностей виду $\langle \infty - \infty \rangle$ необхідно так перетворити вираз (помножити та поділити на спряжений, звести до спільного знаменника), щоб після перетворення можна було отримати невизначеність виду $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$ чи $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$ і позбавитися невизначеності шляхом скорочення на спільний множник або зведення подібних доданків.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \text{ ☺☺}$$

Приклад 4. Знайти границі, використавши першу визначну границю.

$$\text{☺} \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 9x}{9x} \cdot \frac{9}{10} \right) = \frac{9}{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} = \frac{9}{10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 \cdot 4} = \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(7x)}{\sin(9x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(7x)}{7x} \cdot \frac{9x}{\sin(9x)} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{9} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{7}{9}. \text{ ☺☺}$$

Приклад 5. Знайти границі, використавши другу визначну границю.

$$\text{☺ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5 \cdot 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+1}{8x+5} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+5-4}{8x+5} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{8x+5} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{8x+5} \right)^{\frac{8x+5}{-4}} \right]^{\frac{-4(x-1)}{8x+5}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

☺☺

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4(x-1)}{8x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x+4}{8x+5} = -\frac{1}{2}$$

Завдання для виконання

Завдання №1. Знайти вказані границі не використовуючи порівняння нескінченно малих величин.

$$\text{01. а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 7x - 2}{-2 + 7x - 3x^2}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{-2 + 7x - 3x^2}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x - 2}{-2 + 7x - 3x^2},$$

$$\text{02. а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x^2 - 4x + 4}{6 + 11x + 4x^2}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^2 - 4x + 4}{6 + 11x + 4x^2}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 4x + 4}{6 + 11x + 4x^2},$$

$$\text{03. а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 9}{-6 + 5x - x^2}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{-6 + 5x - x^2}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{-6 + 5x - x^2},$$

04. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 12}{9 - 3x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 7x + 12}{9 - 3x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 12}{9 - 3x - 2x^2}$,
05. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-12 + 11x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-12 + 11x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-12 + 11x - 2x^2}$,
06. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 13x + 4}{8 - 18x - 5x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 13x + 4}{8 - 18x - 5x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 13x + 4}{8 - 18x - 5x^2}$,
07. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 17x + 10}{-5 + 11x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 17x + 10}{-5 + 11x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 17x + 10}{-5 + 11x - 2x^2}$,
08. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 16x + 5}{15 - 7x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3x^2 + 16x + 5}{15 - 7x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 16x + 5}{15 - 7x - 2x^2}$,
09. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 11x - 6}{-18 + 27x - 4x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{-18 + 27x - 4x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 11x - 6}{-18 + 27x - 4x^2}$,
10. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x + 18}{-30 + 11x - x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 9x + 18}{-30 + 11x - x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9x + 18}{-30 + 11x - x^2}$,
11. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 + 26x - 8}{-28 + x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{-28 + x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 26x - 8}{-28 + x + 2x^2}$,
12. a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{50 + 15x + x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{50 + 15x + x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 15x + 25}{50 + 15x + x^2}$,
13. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 8}{-5 + 3x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{-5 + 3x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{-5 + 3x + 2x^2}$,
14. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x^2 + 13x + 7}{5 + 8x + 3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 13x + 7}{5 + 8x + 3x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 13x + 7}{5 + 8x + 3x^2}$,
15. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 5x - 2}{-6 - x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{-6 - x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x - 2}{-6 - x + 2x^2}$,
16. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - 4x + 5}{25 + 15x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{-x^2 - 4x + 5}{25 + 15x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 4x + 5}{25 + 15x + 2x^2}$,
17. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 7x + 3}{-1 + x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{-1 + x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x + 3}{-1 + x + 2x^2}$,
18. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 9x + 9}{6 - 5x + x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{6 - 5x + x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 9x + 9}{6 - 5x + x^2}$,
19. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 5x - 4}{-8 - 2x + x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 5x - 4}{-8 - 2x + x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 5x - 4}{-8 - 2x + x^2}$,
20. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 + 5x + 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 + 5x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 + 5x + 2x^2}$,

21. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 - 13x + 10}{-15 + 17x + 4x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{-3x^2 - 13x + 10}{-15 + 17x + 4x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 13x + 10}{-15 + 17x + 4x^2}$,
22. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + 13x - 15}{-5 - 24x + 5x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 + 5x + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 8}{2 + 5x + 2x^2}$,
23. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - 5x + 12}{-16 + 8x + 3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{-2x^2 - 5x + 12}{-16 + 8x + 3x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 5x + 12}{-16 + 8x + 3x^2}$,
24. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^2 + 14x - 8}{12 - 19x + 4x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3x^2 + 14x - 8}{12 - 19x + 4x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 14x - 8}{12 - 19x + 4x^2}$,
25. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 9x + 9}{3 - 5x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 9x + 9}{3 - 5x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x + 9}{3 - 5x - 2x^2}$,
26. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9}{-6 + 11x - 3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{-6 + 11x - 3x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{-6 + 11x - 3x^2}$,
27. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 12}{-24 + 22x - 3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 4x - 12}{-24 + 22x - 3x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 12}{-24 + 22x - 3x^2}$,
28. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 19x + 20}{-25 + 15x - 2x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 19x + 20}{-25 + 15x - 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 19x + 20}{-25 + 15x - 2x^2}$,
29. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-16 - 8x + 3x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-16 - 8x + 3x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 15x - 4}{-16 - 8x + 3x^2}$,
30. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x + 6}{10 + 3x - x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{10 + 3x - x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 6}{10 + 3x - x^2}$,

Завдання № 2. Знайти вказані границі, звільнившись від ірраціональності у чисельнику або знаменнику.

01. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2 - x}}$, 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{8 - x}}{-2 + x}$, 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 - x}}{x - 1}$,
02. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x}}{x + 2}$, 12. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}}$, 22. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{\sqrt{x + 9} - \sqrt{-1 - x}}$,
03. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2 - x}}$, 13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}{-3 + x}$, 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{7 - x}}{x - 1}$,
04. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 8} - \sqrt{4 - x}}{x + 2}$, 14. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 3} - \sqrt{9 - x}}{-6 + x}$, 24. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x + 5}{\sqrt{x + 10} - \sqrt{-x}}$,

$$\begin{array}{lll}
05. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}, & 15. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}}, & 25. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-2-x}}{x+4}, \\
06. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{-4-x}}{x+5}, & 16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{-2+x}, & 26. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{-1-x}}{x+3}, \\
07. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}{x-1}, & 17. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{-1-x}}{2+x}, & 27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}, \\
08. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{\sqrt{x+8}-\sqrt{-2-x}}, & 18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}}, & 28. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}, \\
09. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{4+x}, & 19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}}{x+1}, & 29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}, \\
10. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{-2-x}}, & 20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{x-3}, & 30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}},
\end{array}$$

Завдання № 3. Знайти вказані границі, використавши першу визначну границю

$$\begin{array}{ll}
01. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{6x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \text{ctg}(9x). & 16. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{-3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin(9x) \cdot \text{ctg}(3x)). \\
02. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x)}{11x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{tg}(4x))^2}{(\arcsin(2x))^2}. & 17. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(6x^2)}{4x^2}. \\
03. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin(3x) \cdot \text{ctg}(8x)). & 18. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2(5x)}{\sin^2 4x}. \\
04. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \arctg(6x) \cdot \text{ctg}(2x). & 19. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{9x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2(4x)}{\text{tg}^2 5x}. \\
05. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{-6x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arctg(6x) \cdot \text{ctg}(3x)). & 20. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{12x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2(8x)}{4x^2}. \\
06. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ctg}(2x)}{\text{ctg}(8x)}. & 21. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(11x)}{13x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2(3x)}{2x^2}. \\
07. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctg(5x))^2}{(\sin(2x))^2}. & 22. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(11x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ctg}(2x)}{\text{ctg} 8x}.
\end{array}$$

$$08. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(7x)}{\operatorname{ctg}(2x)}.$$

$$09. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin(8x))^2}{(\sin(4x))^2}.$$

$$10. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2}.$$

$$11. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(10x)}{\sin(5x)}.$$

$$12. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg}(12x).$$

$$13. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-8x)}{7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg}(6x))^2}{(\arcsin(2x))^2}.$$

$$14. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{-7x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin(9x) \cdot \operatorname{ctg}(2x)).$$

$$15. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(7x) \cdot \operatorname{ctg}(2x).$$

$$23. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{13x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg}(5x) \cdot \operatorname{ctg}(2x)).$$

$$24. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x)}{11x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin(6x) \cdot \operatorname{ctg}(3x)).$$

$$25. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{-12x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(12x) \cdot \operatorname{ctg}(4x)).$$

$$26. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{18x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}(3x) \cdot \operatorname{tg}(12x)).$$

$$27. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x)}{13x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(7x)}{5x}.$$

$$28. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{13x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x \sin 5x}.$$

$$29. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{-2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$30. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{-19x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(8x)}{4x}.$$

Завдання № 4. Знайти вказані границі, використавши другу визначну границю.

$$01. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-4}\right)^{3x+1}.$$

$$02. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-5}\right)^{3x+4}.$$

$$03. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2x+7}\right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x-1}.$$

$$04. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x-3}\right)^{5x+2}.$$

$$05. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x-5}\right)^{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x+3}.$$

$$06. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{5x+3}\right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x+5}.$$

$$07. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{-5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{3x-4}.$$

$$16. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-3}{3x+1}\right)^{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}.$$

$$17. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}.$$

$$18. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x-4}.$$

$$19. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-4}\right)^{-2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{3x-4};$$

$$20. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+3}\right)^{-5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-4}\right)^{5-2x}.$$

$$21. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-3}\right)^{5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+3}\right)^{1-5x};$$

$$22. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-3}\right)^{5x+3}.$$

$$08.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-1} \right)^{5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-4} \right)^{1-2x}.$$

$$23.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-3}{3x+1} \right)^{3-x}.$$

$$09.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5} \right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x+5} \right)^{x+5}.$$

$$24.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-5} \right)^{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+4}.$$

$$10.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+6} \right)^{2x+3}.$$

$$25.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+5}{5x-3} \right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-1} \right)^{3x-3}.$$

$$11.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-1} \right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4} \right)^{x+4}.$$

$$26.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x-1} \right)^{-3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{5-3x}.$$

$$12.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+4} \right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3} \right)^{5x-1}.$$

$$27.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5} \right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x-5}.$$

$$13.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-4} \right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-3} \right)^{5x-4}.$$

$$28.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{-x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-4} \right)^{1-2x}.$$

$$14.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-3} \right)^{5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-3}{3x+2} \right)^{3x+1}.$$

$$29.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+5}{5x-3} \right)^{x+3}.$$

$$15.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{x+5}.$$

$$30.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-1} \right)^{2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-5} \right)^{4-x}.$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

Обчисливши границю функції, отримаємо:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{5x^4 - x^3 - 2x^2 - 1} = ; \quad \text{а) } -\frac{1}{5}; \quad \text{б) } \frac{1}{5}; \quad \text{в) } 5; \quad \text{г) } -5.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-1} \right)^{4x-8} = ; \quad \text{а) } e^{36}; \quad \text{б) } e^4; \quad \text{в) } e^8; \quad \text{г) } e^{-36}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 27x}{6x} = ; \quad \text{а) } \frac{2}{9}; \quad \text{б) } 27; \quad \text{в) } \frac{9}{2}; \quad \text{г) } 6.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 14x = ; \quad \text{а) } \frac{1}{196}; \quad \text{б) } \frac{3}{5}; \quad \text{в) } 7; \quad \text{г) } 14.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4} - 2}{3 - \sqrt{17-x}} = ; \quad \text{а) } 1,5; \quad \text{б) } 2; \quad \text{в) } 3,5; \quad \text{г) } 2,5.$$

Практичне заняття №9

План

1. Неперервність функції, основні властивості неперервних функцій.
2. Застосування функції однієї змінної у задачах економіки.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Знайти область визначення функцій: а) $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$,

б) $y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}$.

☺ а) $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$. Функція визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1+x > 0$. Таким чином, областю визначення функції є: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

б) $y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}$. Перший доданок $\sqrt{1-2x}$ набуває дійсних значень при $1-2x \geq 0$, а другий - при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Розв'язавши здобуту систему нерівностей,

знайдемо область визначення функції: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. ☺☺

Приклад 2. Дослідити на неперервність функції та встановити характер точок розриву: а) $y = \frac{x}{x-4}$, б) $y = \arctg \frac{1}{x-4}$, в) $y = \frac{x^2-25}{x-5}$.

☺ а) Знаходимо $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty$. Таким чином, функція при $x \rightarrow 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

б) Якщо $x \rightarrow 4-0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\frac{\pi}{2}$. Якщо $x \rightarrow 4+0$, то $\frac{1}{x-4} \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \frac{\pi}{2}$. Таким чином, при $x \rightarrow 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

в) У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x-5$, оскільки $x-5 \neq 0$. Звідси, при $x \rightarrow 5$ легко показати, що $\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10$.

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ неперервна при всіх значеннях x , якщо вважати, що рівність $\frac{x^2-25}{x-5} = x+5$ справджується при всіх значеннях x , включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x+5$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання №1. Знайти область визначення функцій

01. а) $y = \sqrt{5-2x}$, б) $y = \frac{1}{x^2-1}$, в) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$.

02. а) $y = \arcsin \frac{x}{4}$, б) $y = \arccos(1-2x)$, в) $y = \sqrt{16-x^2}$.

03. а) $y = \ln \cos x$, б) $y = \frac{x}{x^2-2}$, в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}-4}$

04. а) $y = \frac{2}{2+\sin x}$, б) $y = \ln \sin x$, в) $y = \sqrt{1-|x|}$.

05. а) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$, б) $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x}+3}$, в) $y = \log_{x-4} 2$.

06. а) $y = \frac{1}{x^2-4}$, б) $y = \frac{x}{\sin x}$, в) $y = 2^{\frac{1}{x-5}}$.

07. а) $y = \frac{x}{x-2}$, б) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, в) $y = \frac{\sin 2x}{2x-4}$.

08. а) $y = \frac{1-x^3}{1-x}$, б) $y = 6^{\frac{1}{2x-1}}$, в) $y = \log_{x-1} 2$.

09. а) $y = \frac{2x-3}{x+4}$, б) $y = \frac{\sin 2x}{x+3}$, в) $y = \sqrt{4-2x}$.

10. а) $y = \cos(2x+1)$, б) $y = \log_x 2$, в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

11. а) $y = \log_2(\sqrt{x}-5)$, б) $y = \frac{1}{\arccos(x-1)}$, в) $y = \frac{2x-3}{2x+4}$.

12. а) $y = \sqrt{6-2x}$, б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}-5} + \arcsin(5x-1)$, в) $y = \frac{2x}{x^2-2x+1}$.

14. а) $y = x - \sqrt{1-x^2}$, б) $y = \log_{11}(-x^2+5x)$, в) $y = \frac{2x}{\cos x - 1}$.

15. а) $y = 6^{\frac{1}{x+3}}$, б) $y = \frac{\sin 2x}{x-5}$, в) $y = \log_{3-x} 2$.

16. а) $y = \frac{2x}{\sin x}$, б) $y = \frac{x^4+2x^2-1}{x^2+2x-3}$, в) $5^{\frac{2x}{x-1}}$.

17. а) $y = x - \sqrt{1-x}$, б) $y = \frac{2x}{x^2+2x+1}$, в) $y = \frac{2x}{\cos x}$.

18. а) $y = \frac{1}{x^2 - 16}$, б) $y = \sqrt{5 - x}$, в) $y = \ln \frac{1}{x}$.
19. а) $y = \frac{4x + 5}{\sqrt{x^3 + x^2 - 4x}}$, б) $y = \frac{x}{\arccos 5x}$, в) $2^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$.
20. а) $y = x - \sqrt{x - x^2}$, б) $y = \frac{x}{\sin 2x}$, в) $y = \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$.
21. а) $y = \frac{4x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$, б) $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{(x - 2) \ln x}$, в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$.
22. а) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, б) $y = \frac{\sin 2x}{2x + 1}$, в) $y = \log_{2x - 1} 2$.
23. а) $y = \ln \cos x$, б) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, в) $y = \frac{2x}{x^2 - 6x + 9}$.
24. а) $y = -3 - \frac{1}{x - 2}$, б) $y = \frac{2x^2}{\sin^2 2x}$, в) $y = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x}}$.
25. а) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, б) $y = 6^{\frac{1}{x}}$, в) $y = x - \sqrt{1 - x^2}$.
26. а) $y = \frac{4x + 5}{\sqrt{x^3 + x^2 - 4}}$, б) $y = \ln \operatorname{tg} x$, в) $y = e^{\frac{1}{x}}$.
27. а) $y = \ln \sin(x + 1)$, б) $y = \sqrt{2x - 3}$, в) $y = -3 - \frac{1}{x - 3}$.
28. а) $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$, б) $y = \frac{2x}{\sin(2x - 1)}$, в) $y = \ln \sqrt{\frac{x - 3}{x^3 - 9}}$.
29. а) $y = x - \sqrt{2x - x^2}$, б) $y = -\frac{1}{3x - 2}$, в) $y = \frac{2x}{\cos x}$.
30. а) $y = 5^{\frac{1}{x + 1}}$, б) $y = \cos(2x)$, в) $y = \log_{x^2 - 1} 2$.

Завдання № 2. Дослідити на неперервність функції, встановити характер точок розриву.

01. а) $y = 1/(1 - e^{1-x})$, б) $y = (2^{1/(x-2)} - 1)/(2^{1/(x-2)} + 1)$, в) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } x > 1, \\ x + 1, & \text{якщо } x < 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$

02. а) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 1}$, б) $y = 5^{\frac{1}{x - 3}}$, в) $y = \frac{2x - 3}{x + 6}$.

03. a) $y = \frac{\sin 2x}{2x}$, б) $y = \frac{2}{1+3^{\frac{1}{x}}}$, в) $y = 3^{\frac{1}{x}}$.
04. a) $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x-3}$, б) $y = \frac{x-3}{x^2-7x+12}$, в) $y = \frac{\sin x}{x}$.
05. a) $y = \frac{1}{x^2+x+1}$, б) $y = \frac{x^2-25}{x-5}$, в) $y = \frac{x}{e^x}$.
06. a) $y = 2^{\frac{1}{x}}$, б) $y = \frac{x}{x-2}$, в) $y = \frac{2x-3}{x+4}$.
07. a) $y = \frac{x}{\sin x}$, б) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, в) $y = \frac{1-x^3}{1-x}$.
08. a) $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x-3}$, б) $y = \sin \frac{\pi}{x}$, в) $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.
09. a) $y = x \cdot \sin \frac{\pi}{x}$, б) $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3; \\ 2x+1, & x > 3. \end{cases}$, в) $y = e^{\frac{1}{1+x}}$.
10. a) $y = \frac{1+x^3}{1+x}$, б) $y = \operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{3})$, в) $y = \ln(x-2)^2$.
11. a) $y = \frac{x^2}{x-2}$, б) $y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2; \\ A, & x = 2. \end{cases}$, в) $y = \ln(\cos x)$.
12. a) $y = 2x^2 + x - 1$, б) $y = \frac{(x+2)e^x}{(x-1)\cos x}$, в) $y = \ln \operatorname{arctg} x, x \in (0, \infty)$.
14. a) $y = \cos(2x+1)$, б) $y = \frac{4x^3+x^2-1}{x^2+2x-3}$, в) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$.
15. a) $y = \frac{x^4-1}{x^2-1}$, б) $y = \frac{2\sin x + 3\cos x}{(x-2)\ln x}$, в) $y = 6^{\frac{1}{x}}$.
16. a) $y = \frac{x-1}{x+1}$, б) $y = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sin x}$, в) $y = \frac{4^x-1}{2x}$.
17. a) $y = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1; \\ 5, & x = 1. \end{cases}$ б) $y = x + \frac{\ln x}{x}$, в) $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.
18. a) $y = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0; \\ x-1, & x > 0. \end{cases}$ б) $y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$, в) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sin x}$.
19. a) $y = \frac{x}{x-5}$, б) $y = 6^{\frac{1}{x-3}}$, в) $y = \frac{x+4}{x^2+2x-8}$.

$$20. \text{ а) } y = \frac{3}{2x-1} + 1, \text{ б) } y = \frac{1}{2^{2x+3} + 8}, \text{ в) } y = \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$21. \text{ а) } y = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ б) } y = \frac{3}{5^{\frac{1}{x-1}} + 3}, \text{ в) } y = \frac{x-3}{x^2 - 7x + 12}.$$

$$22. \text{ а) } y = \frac{1}{3^{\frac{1}{x-1}} + 1}, \text{ б) } y = \frac{1}{x+1}, \text{ в) } y = \frac{x-4}{x^2 - 7x + 12}.$$

$$23. \text{ а) } y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2; \\ x & \text{при } x > 2. \end{cases}, \text{ б) } y = \lg(x^2 + 3x), \text{ в) } y = \arcsin \frac{1}{x}$$

$$24. \text{ а) } y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0; \\ (x-1)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 4 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}, \text{ б) } y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, \text{ в) } y = \sqrt[3]{2} - 1.$$

$$25. \text{ а) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x > -1. \end{cases}, \text{ б) } y = x \ln x^2, \text{ в) } y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

$$26. \text{ а) } y = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}, \text{ б) } y = e^{\frac{-1}{x^2}}, \text{ в) } y = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$27. \text{ а) } y = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}, \text{ б) } y = \frac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}, \text{ в) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$28. \text{ а) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x & \text{при } 1 < x \leq 2. \end{cases}, \text{ б) } y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \text{ в) } y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}.$$

$$29. \text{ а) } y = \begin{cases} 2x + 5 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > -1. \end{cases}, \text{ б) } y = \frac{1}{1 - 2^{\cos x}}, \text{ в) } y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

$$30. \text{ а) } y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 4 - 2x & \text{при } 1 < x < 2,5; \\ 2x - 7 & \text{при } 2,5 \leq x < \infty. \end{cases}, \text{ б) } y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}, \text{ в) } y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}.$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Функція $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ у точці $x=0$

- а) має усувний розрив;
в) неперервна;

- б) має скінченний стрибок;
г) має нескінченний стрибок.

2. Функція $f(x) = \frac{\sin(x-3)}{|x-3|}$ у точці $x=3$
- а) має усувний розрив; б) має скінченний стрибок;
в) неперервна; г) має нескінченний стрибок.
3. Функція $f(x) = \arctg \frac{1}{x-1}$ у точці $x=1$
- а) має усувний розрив; б) має скінченний стрибок;
в) неперервна; г) має нескінченний стрибок.
4. Функція $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ у точці $x=1$
- а) має усувний розрив; б) має скінченний стрибок;
в) неперервна; г) має нескінченний стрибок.
5. Функція $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 2; \\ \log_2 x, & x > 2 \end{cases}$ у точці $x=2$
- а) має усувний розрив; б) має скінченний стрибок;
в) неперервна; г) має нескінченний стрибок.

Тема 10. Похідна функції однієї змінної

Практичне заняття №10

План

- Правила знаходження похідних, похідні складених функцій, похідна оберненої функції.
- Похідна степенево-показникової функції, похідна функції, заданої параметрично, похідна неявної функції.

Похідні від основних елементарних функцій

- | | |
|--|--|
| 1. $(x)' = 1;$ | 2. $(x^m)' = mx^{m-1};$ |
| 3. $(e^x)' = e^x;$ | 4. $(a^x)' = a^x \ln a;$ |
| 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ | 6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$ |
| 7. $(\sin x)' = \cos x;$ | 8. $(\cos x)' = -\sin x;$ |
| 9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ | 10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ |
| 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ | 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ |
| 13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ | 14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$ |

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

☺ Дана функція є алгебраїчною сумою функцій.

$$\text{Тоді, } y' = (3x^2)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)',$$

$$y' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x} \quad \text{☺☺}$$

Приклад 2. Знайти похідну складеної функції $y = 6^{\arcsin(x^5-4)}$.

☺ Задана функція складена: зовнішня - показникова функція з основою 6, внутрішня для неї - обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складеною, для якої внутрішня функція - алгебраїчна сума $x^5 - 4$. Для суми аргументом є x .

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

$$y' = 6^{\arcsin(x^5-4)} \ln 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^5-4)^2}} \cdot 5x^4. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 3. Знайти похідну оберненої функції $x = \arcsin y$.

☺ Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad \text{Звідси } (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Якщо в останньому виразі замість y записати x , то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{☺☺}$$

Приклад 4. Знайти похідну степенево-показникової функції $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x}$.

☺ Крок 1. Прологарифмуємо задану функцію за основою e :

$$\ln y = \sin 4x \ln(\operatorname{tg} 3x).$$

Крок 2. Продиференціюємо ліву і праву частини рівності.

$$\frac{y'}{y} = \left(4 \cos 4x \cdot \ln(\operatorname{tg} 3x) + \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x} \right),$$

Крок 3. Виразимо з останньої рівності y' :

$$y' = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin 4x} \left(4 \cos 4x \cdot \ln(\operatorname{tg} 3x) + \frac{3 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x} \right).$$

Приклад 5. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq \pi).$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t ; б) при $t = \frac{\pi}{4}$.

$$a) y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t; \quad б) (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \odot \odot$$

Приклад 6. Знайти похідну функції, що задана неявно $x^2 + y^2 = 4$.

☺ Оскільки y є функцією від x , то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x , тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання № 1. Знайти похідні функцій:

01. $a) y = \left(8x^3 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^2}} + 6\right)^8$; $b) y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{x^3-3x}}$; $c) y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}} + x^3$;

$d) y = 7^{\arccos 2x} + x \ln 2x$; $e) 3^{\sin y} + xy = x^2$; $f) y = x^{\arccos x}$.

$a) y = \left(\frac{x^{10}}{5} + 4\sqrt[8]{x^5} + 2\right)^9$; $b) y = \ln \sqrt{\frac{3x-1}{x^2+6x+2}}$; $c) y = \ln \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \sqrt[5]{x^3}$;

02.

$d) y = 5^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; $e) \ln(x+y) = y^3 + \sin x$; $f) y = x^{\operatorname{ctg} \frac{1}{2x}}$.

$a) y = (4x^3 - 6x\sqrt[3]{x^2} - 3)^5$; $b) y = \ln \sqrt{\frac{3-x^2}{x^3-9x}}$; $c) y = \arcsin \sqrt{1-4x^2} + 2x^3$;

03.

$d) y = 3^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x^2 \sin x$; $e) x + \operatorname{tgy} = y^3 + e^{xy}$; $f) y = x^{\ln x}$.

$a) y = (8x^3 + 2x\sqrt[4]{x} - 1)^8$; $b) y = \ln \sqrt{\frac{8-3x^2}{x^3-8x}}$; $c) y = \arccos \sqrt{1-x^4} + \sqrt[5]{x^2}$;

04.

$d) y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x^5 \ln^2 x$; $e) x - \ln y^x = y^7 + \sqrt{x}$; $f) y = x^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

$a) y = \left(7x^5 - \frac{4}{x^4\sqrt{x}} + 3\right)^4$; $b) y = \ln \sqrt{\frac{3x^2+1}{x^3+x}}$; $c) y = 2 \arcsin \sqrt{1-x^2} + 5x^2$;

05.

$d) y = 2^{\operatorname{arctg} 2x} - x^6 \operatorname{ctg} 3x$; $e) 2 + 3 \arcsin xy = x^4 + 4x$; $f) y = x^{\log_2 x}$.

$$a)y = \left(4x^5 - \frac{5x}{\sqrt[5]{x^2}} + 2\right)^8; b)y = \ln \sqrt{\left(\frac{1+2x^2}{2x^3+3x}\right)^2}; c)y = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^3};$$

06.

$$d)y = 3^{\arcsin x} + x\sqrt{1-x}; e)\frac{\cos y}{\sin x} - 3y = x - 5; f)y = x^{\cos \frac{1}{x}}.$$

$$a)y = \left(3x^7 - \frac{2}{3x\sqrt{x}} + 1\right)^7; b)y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3}\right)^3}; c)y = \ln \arccos \sqrt{1-4x^2} + 7x^2;$$

07.

$$d)y = 2^{\cos \frac{x}{3}} + x \sin \frac{x}{3}; e)\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{y}{x}; f)y = x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$a)y = \left(3x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\right)^6; b)y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{7-x^5}{x^5-35x}\right)^2}; c)y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2};$$

08.

$$d)y = 2^{\sin^2 x} + x \cos 2x; e)\frac{y}{x} - \sin y = \log_3 x; f)y = x^{\arcsin \frac{1}{x}}.$$

$$a)y = \left(5x^4 + \frac{2}{2x^3\sqrt{x}} - 3\right)^7; b)y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x^3+4}{3x^2-4}\right)^3}; c)y = \ln \cos 3^{x^2} + 3x^2;$$

09.

$$d)y = 5^{\sin 2x} - x \cos 2x; e)7 + \operatorname{arctg} xy = x + \ln y; f)y = x^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$a)y = \left(\frac{x^8}{4} + 16x^8\sqrt{x^3} - 1\right)^3; b)y = \ln \sqrt[4]{\frac{4x-1}{x^4+1}}; c)y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + x^2;$$

10.

$$d)y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} 3x} - 2^{x^2}; e)y^5 + e^{xy} = y + \sin x; f)y = (\operatorname{tg} x)^x.$$

$$a)y = \left(5x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^4; b)y = \ln \sqrt[4]{\frac{1-8x}{x^8+1}}; c)y = \arccos \sqrt{1-x} + 2x^5;$$

11.

$$d)y = 3^{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sin 3x}{1 + \sin 3x}; e)\ln x^y + \sin x = x + y^4; f)y = (\log_2 x)^x.$$

$$a)y = \left(3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3\right)^5; b)y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}; c)y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-3} + 3x^3;$$

12.

$$d)y = x^2 \operatorname{tg} 2x - 5^{\sqrt{x}}; e)y^5 + x^7 - \sqrt{xy} = 3; f)y = (\ln x)^x.$$

$$a)y = \left(3x^4 + \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\right)^5; b)y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}; c)y = \sqrt{1-4x^2} + \arccos 2x;$$

13.

$$d)y = 2^{tgx} + x \sin 2x; e)\frac{x}{\sin y} + x^3 = 2y^5; f)y = (\sin x)^x.$$

$$a)y = \left(3x^{10} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - 5\right)^7; b)y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1-x^2}{2x^2+1}\right)}; c)y = \ln \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + x^2;$$

14.

$$d)y = 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}} + xtgx; e)xy = \ln x + \cos y; f)y = (2x-1)^{\log_2 x}.$$

$$a)y = \left(4x^3 - \frac{3}{x^3\sqrt{x}} - 2\right)^5; b)y = \ln \sqrt[6]{\left(\frac{1+x^6}{6x+5}\right)}; c)y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + 3x^4;$$

15.

$$d)y = 2^{x^2+1} - x \sin 4x; e)\log_2 + tgx = x^2 + y; f)y = (\arcsin x)^{2x}.$$

$$a)y = \left(10x^3 + \frac{7}{\sqrt[7]{x^5}} - 5\right)^6; b)y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{2x^3+3x}{x^3-3x}\right)}; c)y = \ln \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \sqrt[3]{x};$$

16.

$$d)y = 2^{\sin x^3} + x \sin^3 x; e)y^2 - tgxy = 5 + x^7; f)y = (3x+1)^{\sin(2x+1)}.$$

$$a)y = \left(7x^5 - 3x^3\sqrt{x^2} - 6\right)^4; b)y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right)^4}; c)y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2};$$

17.

$$d)y = e^{tgx} - \sqrt{x} \cos 2x; e)3x^2 + 2y^5 = ctgxy; f)y = (\arccos)^x.$$

$$a)y = \left(5x^{11} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - 3\right)^5; b)y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{3x^2+1}{3-x^2}\right)}; c)y = 5x^2 + \ln \operatorname{arccotg}\sqrt{2x-1};$$

18.

$$d)y = 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} + xtgx; e)\sqrt[5]{x^2y} = 2x + y - 1; f)y = (x+y)^{\lg x}.$$

$$a)y = \left(3x^4 + 8\sqrt[4]{x^5} - 2\right)^3; b)y = \ln \sqrt[6]{\left(\frac{4x^3-1}{4x^3+1}\right)}; c)y = \arccos \sqrt{1-9x^2} + 3x^2;$$

19.

$$d)y = 4^{tg\sqrt{x-1}} + x\sqrt{x-1}; e)2^{xy} = \frac{x}{y} + tgy; f)y = x^{\sin x}.$$

20. a) $y = \left(11x^5 + \frac{4}{\sqrt{x}} - 2 \right)^4$; b) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{x^3 - 9x}{x^3 + x} \right)^7}$; c) $y = \arccos \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x^2}$;

d) $y = 2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}} + x^2 \log_2 x$; e) $3^x + 2^y = \arcsin xy$; f) $y = (2x + 1)^{\ln x}$.

21. a) $y = \left(3x^4 - \frac{9}{x^2 \sqrt[3]{x}} + 2 \right)^3$; b) $y = \ln \sqrt{\left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 3x} \right)}$; c) $y = \ln \operatorname{tg}(3x - 1)^2 + x^2$;

d) $y = 5^{\arccos 3x} + x \sin x$; e) $\frac{x}{y+1} - \sin \frac{x}{y} = 2y$; f) $y = x^{\arcsin x}$.

22. a) $y = \left(4x^5 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right)^5$; b) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{2 + 3x^2}{x^3 + 2x} \right)^7}$; c) $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{2x - 1} - x \cos^2 x$;

d) $y = 3^{\operatorname{ctg} 5x} + x \sin 5x$; e) $\log_5(x - y) = \cos x + \sin y$; f) $y = x^{2 \sin(5x+3)}$.

23. a) $y = \left(\frac{3x^8}{8} - 6x^3 \sqrt{x} - 6 \right)^7$; b) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2 + 7}{3x^2 - 1} \right)^4}$; c) $y = \ln \cos e^{-4x} + 5x^3$;

d) $y = 6^{\operatorname{ctg} x} - x \log_6 x$; e) $2x^3 + 3y^2 = \sqrt[7]{x^2 y^4}$; f) $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

24. a) $y = \left(5x^9 + 2x^3 \sqrt{x^2} - 1 \right)^4$; b) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 4x^2}{4x^3 - 3x} \right)^2}$; c) $y = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + \sqrt[3]{x}$;

d) $y = 4^{\cos 2x} - x \cos^2 x$; e) $7^{\frac{x}{y}} + 3^{xy} = 2 + \sin x$; f) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

25. a) $y = \left(\frac{3x^5}{5} + 10 \sqrt[5]{x^2} + 6 \right)^3$; b) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{x^5 - 3}{x^5 + 3} \right)^8}$; c) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{2x+1} + 2x^3$;

d) $y = 4^{\sin 2x} + x \cos 2x$; e) $5x^7 - 7y^5 = \cos \frac{x}{y}$; f) $y = (\lg x)^x$.

26. a) $y = \left(3x^2 - \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right)^5$; b) $y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{x^2 - 4}{x^3 - 12} \right)^9}$; c) $y = \ln \arccos \frac{1}{2x} + 4x^5$;

d) $y = 3^{\operatorname{tg} 2x} - x \sin 2x$; e) $\frac{2x-y}{3x+y} = \log_3(x+y)$; f) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

27. a) $y = \left(3x^4 + \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} - 3 \right)^5$; b) $y = \ln \sqrt[7]{\left(\frac{x^6 - 3}{6x + 2} \right)^3}$; c) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + 4x^3$;
 d) $y = x \operatorname{tg} 3x + 2^{x-2}$; e) $\frac{y}{x-3} + \cos y = \ln x$; f) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.
28. a) $y = \left(8x^3 - \frac{9}{x^2 \sqrt[3]{x}} + 6 \right)^3$; b) $y = \ln \sqrt[7]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2} \right)^3}$; c) $y = \arcsin \sqrt{1-x} + 2x^6$;
 d) $y = 3^{\sin x} - \sqrt[3]{x \operatorname{tg} 3x}$; e) $5^{\operatorname{tg} y} = y^2 + \sqrt{xy}$; f) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.
29. a) $y = \left(5x^2 + 4x \sqrt[8]{x^3} - 4 \right)^7$; b) $y = \ln \sqrt[8]{\left(\frac{3x^4-2}{3x^4+2} \right)^3}$; c) $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{2x+1} + 10x^{10}$;
 d) $y = 4^{\cos^2 2x} - x \sin 2x$; e) $\log_4(y-x) - y^5 = \operatorname{tg} x$; f) $y = x^{\cos x}$.
30. a) $y = \left(4x^5 - \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2}} + 2 \right)^7$; b) $y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3} \right)^3}$; c) $y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}$;
 d) $y = 5^{\sin 2x} - x \cos 2x$; e) $\log_5(x-y) = \cos x - \sin y$; f) $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

Завдання № 2. Знайти похідні функцій:

- | | |
|--|---|
| 01. $y = 7^{\arcsin(2x)}$. | 16. $y = \arcsin x^2$. |
| 02. $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 2x)$. | 17. $y = 5^{\cos 2x}$. |
| 03. $y = (6\sqrt{x} - x^3)^4$. | 18. $y = \sqrt{8x^2 - x} + 5$. |
| 04. $y = (\sin x)^x$. | 19. $y = x^{\sin x}$. |
| 05. $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$. | 20. $y = 9^{\arccos x}$. |
| 06. $y = \sqrt[4]{\cos(3x-1)}$. | 21. $y = e^{\arcsin 2x}$. |
| 07. $y = 3^{\operatorname{arctg} x}$. | 22. $y = \ln(4x^3 - 5x^2 + 2x)$. |
| 08. $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$. | 23. $y = (9\sqrt{x} - x^3)^8$. |
| 09. $y = (\cos x)^x$. | 24. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$. |
| 10. $y = (\sin(7x-1))^2$. | 25. $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$. |
| 11. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$. | 26. $y = \sqrt[4]{\sin(3x-1)}$. |
| 12. $y = x^{x^2}$. | 27. $y = 4^{\operatorname{arctg} x}$. |
| 13. $y = (\operatorname{arctg} \sin 5x)^2$. | 28. $y = e^{\operatorname{tg} 3x}$. |
| 14. $y = \ln(4x^3 - 7x^2 + 9)$. | 29. $y = (\operatorname{ctg} x)^x$. |
| 15. $y = x^x$. | 30. $y = 7^{\operatorname{tg}(x^2)}$. |

Завдання № 3. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

- | | |
|---|---|
| 01. $x = a \cos^3 \varphi$; $y = b \sin^3 \varphi$. | 17. $x = 3 \cos^4 \varphi$; $y = 4 \sin^3 \varphi$. |
| 02. $x = a(\varphi - \sin \varphi)$; $y = a(1 - \cos \varphi)$. | 18. $x = 7 \cos \varphi$; $y = 4 \sin 3\varphi$. |

03. $x = 1 - t^2$; $y = t - t^3$.
04. $x = \ln(1 + t^2)$; $y = t - \operatorname{arctg} t$.
05. $x = \varphi(1 - \sin \varphi)$; $y = \varphi \cos \varphi$.
06. $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$.
07. $x = 5 \cos 2\varphi$; $y = 3 \sin 3\varphi$.
08. $x = \ln(\sqrt{1 - t^2})$; $y = t - \arcsin t$.
09. $x = \ln(2 + 8t^2)$; $y = t - \operatorname{arctg} 2t$.
10. $x = e^{t^2} \sin t$; $y = e^t \cos 2t$.
11. $x = 2(\varphi - \sin \varphi)$; $y = a(1 - \cos 2\varphi)$.
12. $x = t^2 - 1$; $y = t - t^3$.
13. $x = \frac{2}{3} \cos 3\varphi$; $y = \frac{1}{4} \sin 4\varphi$.
14. $x = e^t \sin t$; $y = e^t \cos t$.
15. $x = (\varphi - \sin 3\varphi)$; $y = 3(1 - \cos \varphi)$.
16. $x = 1 - 4t^2$; $y = 2t - \frac{4}{3}t^3$.
19. $x = \ln(\sqrt{1 - 4t^2})$; $y = t - \arcsin 2t$.
20. $x = \ln(1 + 4t^2)$; $y = t - \operatorname{arctg} 2t$.
21. $x = e^{-t} \sin 2t$; $y = e^t \cos \frac{t}{2}$.
22. $x = 3\left(\varphi - \sin \frac{\varphi}{3}\right)$; $y = 4(1 - \cos \varphi)$.
23. $x = 4 - t^2$; $y = 4t - t^3$.
24. $x = \cos^2 \varphi$; $y = 2 \sin^2 \varphi$.
25. $x = \cos 3\varphi$; $y = 2 \sin \varphi$.
26. $x = e^{3t} \sin t$; $y = e^t \cos 6t$.
27. $x = a(\varphi - \sin \varphi)$; $y = a(1 - \cos \varphi)$.
28. $x = 1 - t$; $y = 2 - t^2$.
29. $x = \frac{1}{3} \cos^3 \varphi$; $y = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.
30. $x = \frac{1}{3} \cos 6\varphi$; $y = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Обчисливши похідну функції $y = (\operatorname{ctgx})^{x^2}$, отримаємо:

а) $y' = 2x \cdot (\ln \operatorname{ctgx} + x^2 \frac{1}{\operatorname{ctgx}} \cdot (-\frac{1}{\sin^2 x})) \cdot (\operatorname{ctgx})^{x^2}$;

б) $y' = x^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctgx}} \cdot (-\frac{\sin^2 x}{2}) \cdot (\operatorname{ctgx})^{x^2}$;

в) $y' = (2x \cdot \ln \operatorname{ctgx} + \operatorname{ctgx}) \cdot (\operatorname{ctgx})^{x^2}$;

г) $y' = 2x \cdot (\ln \sin x + x^2 \frac{1}{\cos x}) \cdot (\operatorname{ctgx})^{x^2}$.

2. Похідна першого порядку функції $\begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = 1 - \ln \sin t \end{cases}$ дорівнює :

а) $\frac{\operatorname{ctgt}}{\operatorname{tgt} - 1}$;

б) $\frac{\operatorname{tgt}}{\operatorname{tgt} - 1}$;

в) $\frac{\operatorname{ctgt}}{\operatorname{tgt} + 1}$;

г) $\frac{\operatorname{ctgt}}{\operatorname{ctgt} - 1}$.

3. Похідна функції $y = \cos 2x \ln x$ дорівнює:

а) $\frac{x}{\sqrt{2 + 4x - x^2}}$;

б) $\frac{2 \sin x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$;

в) $\frac{\cos 2x}{x} - 2 \sin 2x \ln x$;

г) $\frac{\cos 2x}{\ln x}$.

4. Похідна функції $y = \sqrt{1 + tg^2 x + tg^4 x}$ дорівнює :

а) $\frac{\operatorname{ctgx} \ln \cos x + \operatorname{tgx} \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}$; б) $\frac{\operatorname{tgx}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}}$; в) $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x}$; г) $\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}}$.

5. Обчисливши похідну функції $y = \ln^3 \frac{5x-1}{6x+5}$, отримаємо :

a) $y' = 3 \ln^2 \frac{5x-1}{6x+5} \cdot \frac{6x+5}{5x-1} \cdot \frac{5(6x+5) - (5x-1)}{(6x+5)^2};$

$$\text{6)} \quad y' = 3 \ln^2 \left(\frac{5x-1}{6x+5} + \frac{6x+5}{5x-1} \right) - \frac{5(6x+5) - 6(5x-1)}{(6x+5)^2};$$

$$\text{B) } y' = 3 \ln^2 \left(\frac{5x-1}{6x+5} \cdot \frac{6x+5}{5x-1} \right) + \frac{5(6x+5) - 6(5x-1)}{(6x+5)^2};$$

$$\Gamma) \quad y' = \ln 2 \cdot \frac{5x-1}{6x+5} \cdot \frac{6x+5}{5x-1} \cdot \frac{5(6x+5) - 6(5x-1)}{(6x+5)^2}.$$

Тема 11. Диференціал функції однієї змінної. Основні теореми диференціального числення

Практичне заняття №11

План

1. Диференціал функції, застосування диференціала у наближених обчисленнях.
2. Диференціали вищих порядків.
3. Правило Лопітала.

Правила знаходження диференціала

1. $y = c; dy = 0;$

3. $y = u + v, \quad dy = du + dv;$

2. $y = uv$, $dy = u dv + v du$; 4. $y = \frac{u}{v}$, $dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

4. $y = \frac{u}{v}$, $dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}$.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Знайти диференціал dy функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x + 1)$.

☺ Оскільки $y' = 2xtg(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то дістанемо

$$dy = \left(2x \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)} \right) dx.$$

Приклад 2. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

😊 Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$27 = 25 + 2 = 25 \left(1 + \frac{2}{25} \right), \text{ звідки } \sqrt{27} = \sqrt{25 \left(1 + \frac{2}{25} \right)} = 5 \sqrt{1 + \frac{2}{25}}.$$

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

Інакше

$$\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1,04.$$

Підставивши, дістанемо $\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1,04 = 5,2$. ☺☺

Приклад 3. Знайти диференціал другого порядку функції $y = 4x^5 - 3x^3 + 5x - 9$.

☺ Послідовно диференціюючи, одержимо $y' = 20x^4 - 9x^2 + 5$, $y'' = 80x^3 - 18x$.

Тому $d^2y = (80x^3 - 18x)dx^2$. ☺☺

Приклад 4. Обчислити границю функцій а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 4)}$,

використовуючи правило Лопіталля.

☺ а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0;$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 4)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(\ln(x^2 - 4))'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{\frac{2x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 3)(x^2 - 4)}{2x} = \frac{(2 \cdot 2 - 3)(2^2 - 4)}{2 \cdot 2} = \frac{0}{4} = 0.$ ☺☺

Завдання для виконання

Завдання № 1. Знайти диференціал функції :

01. $y = e^{x^2};$

02. $y = \ln(\sin x);$

03. $y = x^{\sqrt{x}};$

04. $y = \cos(5x^2 - 2x + 3);$

05. $y = \frac{1}{x^5};$

06. $y = \arcsin \frac{x}{a};$

07. $y = e^{-2x^2};$

08. $y = \arccos \frac{1}{2x};$

09. $y = \ln \frac{1 + 2x}{1 - 2x};$

10. $y = \frac{x}{1 - x};$

11. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$

16. $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a};$

17. $y = \sin 2x - \cos 2x;$

18. $y = \ln(1 - x^2);$

19. $y = \operatorname{arctg} e^{-x};$

20. $y = \frac{x}{\operatorname{arctg} x};$

21. $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$

22. $y = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x};$

23. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$

24. $y = \frac{\cos x}{1 + x};$

25. $y = \frac{\sin x}{x};$

26. $y = \ln(\operatorname{arctg} 2x);$

$$12. y = x^2 \ln x - x^2;$$

$$13. y = \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{\sin 2x};$$

$$14. y = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x);$$

$$15. y = xe^x;$$

$$27. y = \frac{1}{\ln(1+x)};$$

$$28. y = e^{3x^2};$$

$$29. y = \ln(\sqrt{x + a^2} - 2x^2);$$

$$30. y = \frac{x}{1+x};$$

Завдання № 2. Обчислити наближено:

$$01. a) \sqrt[4]{16,2}, \text{ б) } \cos 46^\circ;$$

$$02. a) \sqrt[3]{0,8973}, \text{ б) } \operatorname{tg} 46^\circ;$$

$$03. a) \sqrt[4]{80}, \text{ б) } \operatorname{ctg} 46^\circ;$$

$$04. a) \sqrt{120}, \text{ б) } \sin 46^\circ;$$

$$05. a) \sqrt[7]{100}, \text{ б) } \sin 91^\circ;$$

$$06. a) \sqrt[4]{17}, \text{ б) } \cos 91^\circ;$$

$$07. a) \sqrt[4]{15}, \text{ б) } \operatorname{tg} 91^\circ;$$

$$08. a) \sqrt{4,012}, \text{ б) } \operatorname{ctg} 91^\circ;$$

$$09. a) \sqrt[3]{9}, \text{ б) } \arcsin 0,49;$$

$$10. a) \sqrt[10]{1000}, \text{ б) } \arccos 0,49;$$

$$11. a) \sqrt[4]{82}, \text{ б) } \operatorname{arctg} 2;$$

$$12. a) \sqrt[3]{65}, \text{ б) } \operatorname{arcctg} 2;$$

$$13. a) \sqrt[4]{15,8}, \text{ б) } \sin 51^\circ;$$

$$14. a) \sqrt[3]{218}, \text{ б) } \sin 46^\circ;$$

$$15. a) \sqrt[4]{83}, \text{ б) } \cos 51^\circ;$$

$$16. a) \sqrt[3]{0,9843}, \text{ б) } \operatorname{tg} 51^\circ;$$

$$17. a) \sqrt[3]{344}, \text{ б) } \operatorname{ctg} 51^\circ;$$

$$18. a) \sqrt{9,012}, \text{ б) } \arcsin 0,25;$$

$$19. a) \sqrt[4]{626}, \text{ б) } \arccos 0,25;$$

$$20. a) \sqrt[7]{204}, \text{ б) } \operatorname{arctg} 1,49;$$

$$21. a) \sqrt{36,043}, \text{ б) } \operatorname{arcctg} 2,49;$$

$$22. a) \sqrt[5]{125}, \text{ б) } \sin 37^\circ;$$

$$23. a) \sqrt[3]{126}, \text{ б) } \cos 37^\circ;$$

$$24. a) \sqrt{16,032}, \text{ б) } \operatorname{tg} 37^\circ;$$

$$25. a) \sqrt[4]{66}, \text{ б) } \operatorname{ctg} 37^\circ;$$

$$26. a) \sqrt[6]{100}, \text{ б) } \arcsin 0,89;$$

$$27. a) \sqrt{49,014}, \text{ б) } \arccos 0,87;$$

$$28. a) \sqrt[4]{82}, \text{ б) } \operatorname{arctg} 1,54;$$

$$29. a) \sqrt{25,012}, \text{ б) } \operatorname{arcctg} 1,91;$$

$$30. a) \sqrt[7]{136}, \text{ б) } \sin 95^\circ.$$

Завдання № 3. Знайти диференціали вказаних порядків:

$$01. y = x \cos 2x, d^{10} y;$$

$$02. y = e^x \ln x, d^4 y;$$

$$03. y = \sin^2 x \cdot \ln x, d^6 y;$$

$$04. y = \sqrt{1-x^2}, d^3 y;$$

$$05. y = x^2 e^{-x}, d^4 y;$$

$$11. y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x, d^4 y;$$

$$12. y = x \cos x, d^4 y;$$

$$13. y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, d^3 y;$$

$$14. y = \ln(x^2 + x + 1), d^3 y;$$

$$15. y = e^{x^2}, d^4 y;$$

$$21. y = x^2 e^{2x}, d^{10} y;$$

$$22. y = \frac{x}{\ln x}, d^6 y;$$

$$23. y = \frac{x^2}{1-x}, d^8 y;$$

$$24. y = \sin x \sin 2x \sin 3x, d^6 y;$$

2. Обчисливши границю функції $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$, використовуючи правило Лопіталля, отримаємо: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.
3. Обчисливши наближено $\sin 46^\circ$, отримаємо:
а) 0,7164; б) 0,6164; в) 0,5164; г) 0,4164.
4. Диференціал третього порядку функції $y = (2x-3)^3$ у дорівнює:
а) $38dx^3$; б) $18dx^3$; в) $28dx^3$; г) $48dx^3$.
5. Приблизне значення площі круга, радіус якого дорівнює 3,02 м, дорівнює:
а) $38,66 \text{ м}^2$; б) $28,66 \text{ м}^2$; в) $18,66 \text{ м}^2$; г) $8,66 \text{ м}^2$.

Тема 12. Функції багатьох змінних

Практичне заняття №12

План

- Частинні похідні функції багатьох змінних, повний диференціал.
- Екстремум функції багатьох змінних, найбільше та найменше значення функції двох змінних, яких вона досягає на обмеженій замкненій області.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дослідити функцію $z = x^3 + y^3 - 15xy$ на екстремум.

☺1. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x.$$

2. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0 \\ 3y^2 - 15x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5y = 0 \\ y^2 - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{5}.$$

$$\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 - 5x = 0$$

$$\frac{x^4}{25} - 5x = 0$$

$$x^4 - 125x = 0$$

$$x(x^3 - 125) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 5.$$

Звідси $y_1 = \frac{0}{5} = 0, y_2 = \frac{5}{5} = 1$.

Отже, маємо дві стаціонарні точки (0;0) і (5;5).

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

4. Підставивши стаціонарні точки у частинні похідні другого порядку, визначаємо A, B, C і Δ :

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 6 \cdot 0 = 0; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -15; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 6 \cdot 0 = 0.$$

Звідси $\Delta = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 0 - (-15)^2 = -225$. Оскільки $\Delta < 0$, то в точці $(0;0)$ функція екстремуму не має.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{\substack{x=5 \\ y=5}} = 6 \cdot 5 = 30; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x=5 \\ y=5}} = -15; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=5 \\ y=5}} = 6 \cdot 5 = 30.$$

Звідси $\Delta = A \cdot C - B^2 = 30 \cdot 30 - (-15)^2 = 900 - 225 = 675$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то в точці $(5;5)$ функція має мінімум.

Щоб визначити мінімальне значення функції в цій точці, підставимо її координати у функцію:

$$Z_{\min} = 5^3 + 5^3 - 15 \cdot 5 \cdot 5 = -125.$$

Отже, точка $(5;5)$ є точкою мінімуму, значення функції в ній дорівнює -125 .

☺☺

Завдання для виконання

Завдання. Знайти диференціали першого та другого порядків вказаних функцій та дослідити їх на екстремум:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. а) $z = 2x^3y - 4xy^5$; | б) $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$. |
| 2. а) $z = x^2y \sin x - 3y$; | б) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. |
| 3. а) $z = \arctg x + \sqrt{y}$; | б) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$. |
| 4. а) $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$; | б) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. |
| 5. а) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; | б) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39 + 18y + 20$. |
| 6. а) $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$; | б) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$. |
| 7. а) $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$; | б) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$. |
| 8. а) $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$; | б) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$. |
| 9. а) $z = \arcsin(x + y)$; | б) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$. |
| 20. а) $z = \arctg(2x - y)$; | б) $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$. |
| 21. а) $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$; | б) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. |
| 22. а) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy$; | б) $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$. |
| 23. а) $z = e^{x+y-4}$; | б) $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$. |
| 24. а) $z = \cos(3x + y) - x^2$; | б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$. |
| 25. а) $z = \tg((x + y)/(x - y))$; | б) $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$. |
| 26. а) $z = \ctg(y/x)$; | б) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. |
| 27. а) $z = xy^4 - 3x^2y + 1$; | б) $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$. |
| 28. а) $z = \ln(x + xy - y^2)$; | б) $z = xy(12 - x - y)$. |
| 29. а) $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$; | б) $z = xy - x^2 - y^2 + 9$. |
| 30. а) $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2} + 5$; | б) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$. |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Екстремумом функції $u=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ буде:

а) $z_{\min}=z(1;-1)=4$; б) $z_{\max}=z(2;-2)=32$; в) $z_{\min}=z(\pm 1;\pm 1)=-2$; г) $z_{\max}=z(-2;2)=2$.

2. Критичною точкою функції $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$ є точка:

а) $M_0(-4;1)$; б) $M_0(4;2)$; в) $M_0(-2;1)$; г) $M_0(2;-1)$.

3. Похідною другого порядку функції $z=5x^3+3y^4+10$ є:

а) $z''_{xx}=30x$, $z''_{xy}=2$, $z''_{yy}=-36$;

б) $z''_{xx}=30x$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=36y^2$;

в) $z''_{xx}=-30x$, $z''_{xy}=-2$, $z''_{yy}=36$;

г) $z''_{xx}=-30x$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=30y^2$.

4. Частинною похідною функції $z=\ln 3x \cdot \arctg(y^2-1)$ є:

а) $\frac{2y \ln 3x}{1+(y^2-1)^2}$;

б) $\frac{2y \ln 2x}{1+(y^2-1)^2}$;

в) $\frac{2y \ln x}{1+(y^2-1)^2}$;

г) $\frac{2y \ln 4x}{1+(y^2-1)^2}$.

5. Повний диференціал функції $z=x^3y+4x^5-3\sqrt{y}+1$ має вигляд:

а) $dz=(3x^2y+20x^4)dx+(x^3-3\sqrt{y})dy$;

б) $dz=(3x^2y+20x^4)dx+(x^3-\frac{3}{2\sqrt{y}})dy$;

в) $dz=(3x^2+20y^4)dx+(x^3-\frac{3}{2\sqrt{y}})dy$;

г) $dz=(3xy+20x^4)dy+(x^3-\frac{\sqrt{y}}{2})dy$.

Тема 13. Дослідження функцій за допомогою похідних

Практичне заняття №13

План

1. Дослідження функції за допомогою похідних та побудова їх графіків;
2. Використання поняття похідної в економіці.

План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегіну, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

⊙1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)^2} = +\infty$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ - точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю Ox : $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, $2x-1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$;

з віссю Oy : $x = 0$, $y = \frac{-1}{1} = -1$, $(0; -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 1:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}; \quad y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ - критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x = -1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$; при $x = \frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

Таблиця 1

X	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	—	0	+	Не існує	—
y		$y_{\min}(-1)$		Не існує	

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «—» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум: $y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1$.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1)=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

$$\text{при } x = -1 \quad y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-); \quad \text{при } x = 0 \quad y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+).$$

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0,9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ - точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 2.

Таблиця 2

X	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
Y	$\cap$	Перегин $(-8/9)$	$\cup$	Не існує	$\cup$

7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. 1: $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$, $(-5; -0,3)$, $(2; 3)$, $(3; 1,3)$.

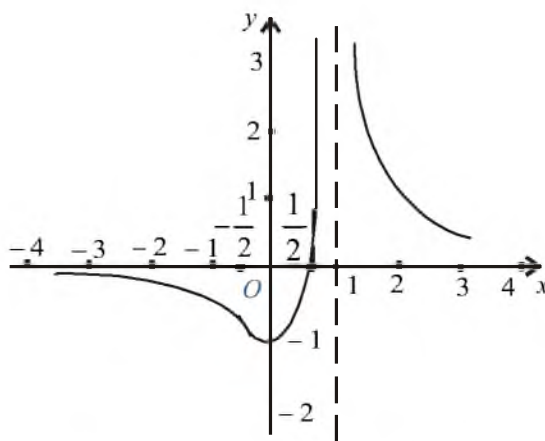


Рис. 1. Графік функції $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$. ☺☺

Приклад 2. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x , що випускається, визначається функцією $y = 50x - 0,05x^3$ (грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.

☺ Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $y_{\text{сер}} = \frac{y}{x} = 50 - 0,05x^2$; при $x = 10$ середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють $y_{\text{сер}}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$ (грош. од.). Функція граничних витрат виражається похідною $y'(x) = 50 - 0,15x^2$; при $x = 10$ граничні витрати складають $y'(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35$ (грош. од.). Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції за умови даного рівня виробництва (обсягу продукції, що випускається 10 од.), складають 35 грош. од. ☺☺

Приклад 3. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. од.) та випуском продукції x (млрд. грош. од.) виражається функцією $y = -0,5x + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.

☺ За формулою еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0,6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%. ☺☺

Приклад 4. За допомогою дослідів були встановлені функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0,5$, де q та s - кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p - ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б)

еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

☺ а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, $\frac{p+8}{p+2} = p+0,5$, звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції:

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо $E_{p=2}(q) = -0,3$; $E_{p=2}(s) = 0,8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$, тобто прибуток зросте на 3,5%. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання №1. Методами диференціального числення дослідити задані функції та побудувати їх графіки.

01. $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 1$

02. $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$

03. $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 7$

04. $y = 3x^3 - 21x^2 + 72x - 5$

05. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 25$

06. $y = x^4 - 3x^2 + 3$

07. $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$

08. $y = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$

09. $y = x^3 + x^2 - 16$

10. $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

11. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $y = x^4 - 2x^2 + 5$

13. $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$

14. $y = x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

15. $y = x^3 + 5x^2 - 6x - 2$

16. $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$

17. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

18. $y = x^3 - 6x^2 - 9$

19. $y = x^4 - 5x^2 - 4$

20. $y = 2x^3 - 3x^2$

21. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

22. $y = x^3 - 3x$

23. $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

24. $y = x^3 - 2x^2 - x$

25. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

26. $y = x^4 - 4x + 4$

27. $y = x^3 - 5x^2 - 8$

28. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x$

29. $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

30. $y = 6x^2 - x^3$

Завдання № 2. Розв'язати задачу методами диференціального числення.

01. Виробництво характеризується функціями попиту $Q = 800 - p$ загальних витрат $TC(Q) = Q^2 - 160Q + 1600$. Знайти ціну на одиницю продукції, за якої прибуток буде максимальний.

02. Функція загальних витрат деякого виробництва має вигляд $TC(Q) = \frac{Q^2 - 6Q + 13}{Q - 13}$. Функція цін попиту $p = 25 - 2Q$. Знайти обсяг продукції, для якого витрати будуть мінімальні. Якою буде ціна на одиницю продукції у цьому випадку?

03. Загальні витрати деякого виробництва виражено функцією $TC(Q) = Q^2 - 400Q + 30000$ і відома функція попиту $Q = 200 - p$. Кожна одиниця виробленої продукції обкладається податком t . Якою повинна бути величина податку t , щоб надходження в бюджет були максимальні?

04. Завод виробляє Q одиниць продукції в місяць. Загальні витрати виробництва $TC(Q) = \frac{Q^2}{50} + 5Q + 300$. Залежність між ціною p і кількістю продукції Q , що можна продати за цією ціною, має вигляд $p = 40 - 0,1Q$. Визначити, для якого обсягу продукції прибуток буде максимальним.

05. Функція загальних витрат має вигляд $TC(Q) = 1,8Q^3 - 144Q^2 + 32000Q + 2100$. Знайти ціну і кількість продукції, коли фірмі вигідніше зупинити виробництво.

06. Відома функція загальних витрат $TC(Q) = 0,21Q^3 - 42Q^2 + 700Q$. Знайти обсяг випуску продукції, для якого продуктивність ресурсів, що використовуються, буде максимальною.

07. Виробництво характеризується функціями попиту $Q = 400 - p$ загальних витрат $TC(Q) = Q^2 - 100Q + 16000$. Знайти максимальний прибуток фірми. Якою буде ціна на одиницю продукції?

08. Функція загальних витрат має вигляд $TC(Q) = 3Q^3 - 120Q^2 + 1600Q + 700$. Знайти ліквідну ціну продукції фірми.

09. Виробництво характеризується функціями цін попиту $p = 10 - 0,02Q$ і загальних витрат $TC(Q) = 0,9Q^2 - 390Q + 36000$. Знайти маргінальні витрати і маргінальний дохід; величину максимального прибутку.

10. Відома функція загальних витрат $TC(Q) = 0,1Q^3 - 27Q^2 + 23Q + 1300$. Знайти обсяг випуску продукції, для якого продуктивність ресурсів буде максимальною.

11. Функція попиту для деякого виробництва має вигляд $Q = 100 - p$, а функція витрат $TC(Q) = 2Q^2 - 44Q + 1508$. Яким буде прибуток, коли $p = 80$ грош. од.? Чи буде це максимальним значенням прибутку?

12. Фірма реалізує продукцію за ціною 50 грн. за одиницю продукції. Функція витрат має вигляд $TC(Q) = Q^2 + 525$. Знайти максимальний прибуток фірми.

13. Середні витрати виробництва в залежності від обсягу продукції задаються функцією $AC(Q) = Q^2 - 6Q + 15$. Визначити, для яких обсягів випуску продукції еластичність загальних витрат $E_Q(TC) > 1$.

14. Функція попиту деякого товару $Q_d = \frac{-p^2 - 6p + 67}{2p + 1}$ і пропозиції $Q_s = \frac{p^2 + 8p + 7}{2p + 1}$.

Визначити ціну товару, для якої попит і пропозиція врівноважуються, а також еластичність пропозиції відносно цієї ціни.

15. Витрати виробництва залежно від обсягу продукції задано функцією $TC(Q) = 4Q^2 - 40Q + 2700$, залежність ціни від кількості продукції, яку можна продавати за цією ціною, має вигляд $p = 200 - 2Q$. Визначити, для яких обсягів випуску продукції еластичність прибутку $E_Q(PR) > 1$.

16. Функція попиту має вигляд $Q_d = 150 - p$. Для яких цін виторг від продажу товару зменшується.

17. Залежність між собівартістю одиниці продукції C (тис.грн.) і випуском продукції Q (млн.грн.) виражено функцією $C = 100 - 0,8Q$. Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції становить 40 млн.грн.

18. Функція попиту має вигляд $Q_d = 200 - 4p$. Визначити, для яких цін попит буде еластичним.

19. Функція цін попиту на деякий товар $Q_d = \frac{5000}{Q + 6}$. Знайти функції темпу росту та еластичності доходу відносно попиту.

20. Функція попиту на деякий товар $Q_d = \frac{4000}{p + 8}$. Знайти функції темпу зростання та еластичності попиту відносно ціни.

21. Відомі функції попиту $Q_d = \frac{p + 8}{p + 1}$ і пропозиції $Q_s = \frac{p}{3}$. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 2%.

22. Функція середніх витрат має вигляд $AC(Q) = Q^2 - 6Q + 20$. Для якого обсягу продукції середні витрати дорівнюватимуть граничним?

23. Залежність між витратами виробництва і обсягом продукції, що випускається, виражено функцією $TC(Q) = 40Q - 0,03Q^3$. Знайти середні і граничні витрати, коли обсяг продукції становить 5 од.; 15 од.

24. Залежність між витратами виробництва і обсягом продукції, що випускається, виражено функцією $TC(Q) = 100Q - 0,08Q^3$. Знайти середні і граничні витрати, коли обсяг продукції становить 5 од.; 10 од.

25. Функція цін попиту на деякий товар має вигляд $p = \frac{600}{Q + 6}$. Знайти маргінальний дохід, коли обсяг виробництва становить 9 од.; 19 од.

26. Витрати виробництва залежно від обсягу продукції задаються функцією $TC(Q) = 100Q - 0,05Q^3$. Знайти функцію маргінальних витрат, побудувати її

графік. Чому дорівнюють маргінальні витрати, коли обсяг виробництва становить 10 од.; 40 од.?

27. Обсяг продукції u , виготовленої підприємством впродовж дня, задано функцією $u = -t^3 - 5t + 75t + 425$ (умов.од.), $1 \leq t \leq 8$ - робочий час у год. Знайти продуктивність праці і темп її зміни за годину до кінця робочого дня. Коли продуктивність праці буде найбільшою?

28. Обсяг виготовленої продукції u залежно від часу t можна описати рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (умов.од.), $1 \leq t \leq 8$ - робочий час у год. Знайти продуктивність праці і темп її зміни через дві години після початку роботи.

29. Визначити, як пов'язані між собою граничні та середні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює одиниці.

30. Визначити, як змінюється загальний виторг із збільшенням ціни на товар при різних варіантах еластичності попиту.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Інтервалами зростання та спадання функції $y = \ln(1-x^2)$ будуть:

а) $(1;2)$ – зростання, б) $(0;1)$ – зростання, в) $(0;1)$ – спадання, г) $(0;-1)$ – спадання, $(0;1)$ – спадання; $(-1;0)$ – спадання; $(-1;0)$ – зростання; $(0;1)$ – зростання.

2. Максимумом і мінімумом функції $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt{x^3} + 1$ є:

а) $y_{\max} = y(0) = -2; y_{\min} = y(1) = 1;$ б) $y_{\max} = y(0) = 1; y_{\min} = y(1) = -2;$

в) $y_{\max} = y(0) = 2; y_{\min} = y(1) = -1;$ г) $y_{\max} = y(0) = -1; y_{\min} = y(1) = 2.$

3. Найбільшим і найменшим значенням функції $u = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, що визначена умовами $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$, будуть:

а) $u(0;0)=0,$ б) $u(0;1)=0,$ в) $u(1;1)=0,$ г) $u(0;0)=1,$
 $u(1;1)=-1,$ $u(1;1)=-1,$ $u(0;0)=-1,$ $u(1;1)=-1.$

4. Інтервалами зростання та спадання функції $f(x) = x^3 - 12x + 11$ є:

а) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ – спадання, б) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ – зростання,
 $(-2;2)$ – зростання; $(-2;2)$ – спадання;

в) $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$ – зростання, г) $(-\infty;-2) \cup (-2;2]$ – зростання,
 $(-2;2) \cup (2;+\infty)$ – спадання; $(-2;2)$ – спадання.

5. Інтервалом опуклості функції $f(x) = (x+3)^{-1}$ є:

а) $(-3;\infty);$ б) $(-\infty;-1);$ в) $(1;\infty);$ г) $(-\infty;-3).$

Тема 15. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Практичне заняття №14

План

1. Метод безпосереднього інтегрування.

Таблиця основних інтегралів

- | | |
|---|---|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$ | 2. $\int dx = x + C,$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$ | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1,$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C,$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C,$ | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C,$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C,$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0,$ | 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C,$ |
| 13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0,$ | 14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a \neq 0,$ |
| 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + a^2} \right + C, a \neq 0,$ | |
| 16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C,$ | 17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C,$ |
| 18. $\int \operatorname{tgx} dx = -\ln \cos x + C,$ | 19. $\int \operatorname{ctgx} dx = \ln \sin x + C.$ |

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити інтеграл: $\int \frac{x^2 + x + \sqrt{x}}{x^3} dx$

☺

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + \sqrt{x}}{x^3} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x^{1/2}}{x^3} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int x^{1/2-3} dx = \ln x + \int x^{-2} dx + \int x^{-5/2} dx = \ln x + \\ &+ \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1} + C = \ln x - \frac{1}{x} + \frac{x^{-3/2}}{-3/2} + C = \ln x - \frac{1}{x} - \frac{2}{3} x^{-3/2} + C. \end{aligned}$$

☺☺

Приклад 2. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

☺

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d \ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \{\ln x = t\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(\ln x) + C.$$

(Враховано, що $d \ln x = (\ln x)' \cdot dx = \frac{1}{x} dx$) ☺☺

Приклад 3. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

☺ Поклавши $x = t^3$, знайдемо $dx = 3t^2 dt$. Ця підстановка призведе до того, що під знаком синуса з'явиться змінна інтегрування, а не корінь з неї. Отримаємо:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{\sin t \cdot 3t^2 dt}{\sqrt[3]{t^6}} = 3 \int \sin t dt = -3 \cos t + C.$$

Відповідь повинна бути виражена через початкову змінну x . Підставляючи в результат інтегрування $t = \sqrt[3]{x}$, дістанемо:

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}} = -3 \cos \sqrt[3]{t} + C. \text{ ☺☺}$$

Завдання для виконання

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{2x^3 + \sqrt{x} + 1}{x^2} dx;$
2. $\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x}} dx;$
3. $\int \frac{(\sqrt{x} + 3x^2 + 1)dx}{\sqrt[3]{x}};$
4. $\int \frac{x^2 + 2\sqrt{x} + 3}{x} dx;$
5. $\int \frac{x^3 + 3x + \sqrt[3]{x}}{2x} dx;$
6. $\int (1 + 2\sqrt{x} + x^2) dx;$
7. $\int \frac{1 + 2x + \sqrt{x}}{x^2} dx;$
8. $\int \frac{2 + x + x^2}{\sqrt{x}} dx;$
9. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 5}{x} dx;$
10. $\int (2x^3 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1) dx;$
11. $\int (x^2 + \sqrt{x} + 2) dx;$
12. $\int (x + \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}) dx;$
13. $\int (1 + \sqrt[3]{x} - 2x^2) dx;$
14. $\int (2\sqrt{x} + x^2 + 1) dx;$
15. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx;$
16. $\int \frac{2\sqrt{x} + x^2 + 1}{\sqrt[3]{x}} dx;$
17. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + x^5 + x}{\sqrt{x}} dx;$
18. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx;$
19. $\int \frac{3x + 2\sqrt[4]{x} + x^3}{\sqrt[3]{x}} dx;$
20. $\int (x^3 + 2\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}) dx;$
21. $\int \frac{1 + \sqrt{x} - 3x}{\sqrt[3]{x}} dx;$

$$\begin{array}{ll}
22. \int \frac{x + \sqrt{x} + 2}{\sqrt[5]{x}} dx; & 23. \int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} + 4x + 1}{\sqrt{x}} dx; \quad 24. \int \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt[6]{x}} dx; \\
25. \int \frac{x + \sqrt{x} + 4}{\sqrt[5]{x}} dx; & 26. \int (x^3 + \sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}) dx; \quad 27. \int (x^5 + 4x + 3\sqrt[3]{x}) dx; \\
28. \int \frac{x + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; & 29. \int \frac{x^5 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 30. \int \frac{x^6 + \sqrt[3]{x} + 5}{\sqrt{x}} dx.
\end{array}$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Невизначений інтеграл $\int \operatorname{tg} 3x dx$ дорівнює

a) $-\ln|\cos 3x| + C$; б) $\ln|\sin 3x| + C$; в) $3\ln|\cos 3x| + C$; г) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$.

2. Невизначений інтеграл $\int \operatorname{ctg} 4x dx$ дорівнює

a) $\frac{1}{4}\ln|\sin 4x| + C$; б) $-\ln(\sin 4x) + C$; в) $4\ln|\sin 4x| + C$; г) $\ln(\sin 4x) + C$.

3. Обчисливши невизначений інтеграл $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$, отримаємо:

a) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C$; б) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$; в) $\frac{3}{8}x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C$; г) $\frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + C$.

4. Невизначений інтеграл $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$ дорівнює

a) $\ln|e^{3x} + 5| + C$; б) $3\ln|e^{3x} + 5| + C$; в) $\frac{1}{3}\ln|e^{3x} + 5| + C$; г) $4\ln|e^{3x} + 5| + C$.

5. Обчисливши невизначений інтеграл $\int (x^5 - 2x^2 + 4x - 6) dx$, отримаємо:

a) $\frac{x^6}{6} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 9x + C$; б) $\frac{x^6}{9} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 9x + C$;
в) $\frac{x^6}{6} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + C$; г) $\frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + C$.

Практичне заняття №15

План

1. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
2. Інтегрування за частинами.

Приклад 1. Обчислити інтеграл: $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

☺

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = u \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \\ dx = du \quad v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= x \cdot \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \{ \cos x = t \} = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \frac{dt}{t} = \\ &= x \cdot \operatorname{tg} x + \ln t + C = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C \end{aligned}$$

(Використана формула інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$). ☺☺

Приклад 2. Обчислити інтеграл: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{☺} \int \frac{\ln x}{x^2} &= \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \quad \frac{dx}{x^2} = dv \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -x^{-1} \end{array} \right\} = \\ &= -x^{-1} \cdot \ln x - \int (-x^{-1}) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(Використана формула інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$). ☺☺

Завдання для виконання

1. Обчислити інтеграли:

1. $\int x^3 \sqrt{4 + x^4} dx$; $\int \frac{6e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; $\int x e^{2x} dx$.

2. $\int x^3 e^{x^4} dx$; $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$; $\int x \cos 6x dx$.

3. $\int x \sqrt{3 + x^2} dx$; $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$; $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$.

4. $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} dx$; $\int \operatorname{arctg} x dx$.

5. $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} dx$; $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; $\int (x+1)\sin 2x dx$.
6. $\int (1+2\sqrt{x}+x^2) dx$; $\int \sin x \cdot \cos^3 x dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; $\int \ln x dx$..
7. $\int \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx$; $\int \frac{x}{\sqrt{8+x^2}} dx$; $\int x \cdot \ln(x+1) dx$.
8. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + \ln x}{x} dx$; $\int x \cdot e^{-3x} dx$.
9. $\int x^3 \cdot e^{-x^4} dx$; $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$; $\int 2x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.
10. $\int \sin x \cdot \cos x dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+4}}$; $\int 3x \cdot \sin 5x dx$.
11. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+4} dx$; $\int 2\operatorname{ctg}^2 2x dx$; $\int \arcsin x dx$.
12. $\int x \cdot e^{-2x^2} dx$; $\int e^x \cdot \cos e^x dx$; $\int \frac{dx}{x \ln x}$.
13. $\int \frac{3\cos x}{1+\sin^2 x} dx$; $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x dx$.
14. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; $\int 3x \cdot \ln \sqrt{x} dx$.
15. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})} dx$; $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$.
16. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx$; $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; $\int x^2 \cdot \cos(x^3+2) dx$.
17. $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$; $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x}} dx$; $\int x \cdot \cos 3x dx$.
18. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$; $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$; $\int (1+\operatorname{tg}^2 x) \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$; $\int x^2 \cdot \ln x dx$.
19. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx$; $\int x \cdot \sin \pi x dx$.
20. $\int \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx$; $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$; $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$.

21. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$; $\int x \cdot \cos x^2 dx$; $\int (3x+1) \cdot e^{-x} dx$.
22. $\int (2x+1) \cdot e^{x^2+x} dx$; $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^4} dx$; $\int x \cdot \arcsin x dx$.
23. $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+4} dx$; $\int \frac{\ln^3 x+1}{x} dx$; $\int 5x^2 \cdot e^{-2x} dx$.
24. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$; $\int \frac{x}{\sin^2 x^2} dx$; $\int 2x \cdot e^{-5x} dx$.
25. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$; $\int \frac{2x-1}{e^{x^2-x}} dx$; $\int x^5 \cdot \ln x dx$.
26. $\int \sin 4x \cdot \cos 4x dx$; $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$; $\int x^4 \cdot \ln x dx$.
27. $\int (x+1) \cdot e^{\frac{x^2}{2}+x} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$; $\int x \cdot \ln(x+2) dx$.
28. $\int \frac{\ln(x+4)}{x+4} dx$; $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; $\int 4x \cdot \sin 3x dx$.
29. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x} dx$; $\int x^2 \cdot \cos^2 x^3 dx$; $\int \frac{\ln^3(x+5)}{x+5} dx$.
30. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$; $\int \operatorname{arctg} x dx$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Обчисливши невизначений інтеграл $\int \ln(4x^2+1) dx$, отримаємо:

- а) $x \cdot \ln(4x^2+1) + \operatorname{arctg} 2x - 2x + C$; б) $x \cdot \ln(8x^2+1) + \operatorname{arctg} 4x - 2x + C$;
 в) $x \cdot \ln(4x^2+1) + \operatorname{arctg} x - 2x + C$; г) $x \cdot \ln(16x^2+1) + \operatorname{arctg} 8x - 2x + C$.

2. Обчисливши невизначений інтеграл $\int e^{-3x}(2-9x) dx$, отримаємо:

- а) $9xe^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + C$; б) $6xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$;
 в) $3xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$; г) $9xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$.

3. Обчисливши невизначений інтеграл $\int x^2 e^{3x} dx$, отримаємо:

- а) $e^{3x}(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}) + C$; б) $e^x(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}) + C$;
 в) $e^{3x}(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}) + C$; г) $e^x(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{8}{27}) + C$.

4. Обчисливши невизначений інтеграл $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$, отримаємо:

- а) $\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$; б) $\frac{1}{8} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2 + C$;
 в) $\frac{1}{6} \ln(x^4 + 1) + \operatorname{arctg} x^2 + C$; г) $\ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$.

5. Обчисливши невизначений інтеграл $\int \frac{\ln x + 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$, отримаємо:

- а) $(\ln x)^3 - 4\sqrt{\ln x} + C$; б) $\frac{2}{3}(\ln x)^3 - \sqrt{\ln x} + C$;
 в) $\ln x + \sqrt{\ln x} + C$; г) $\frac{2}{3}(\ln x)^3 + 4\sqrt{\ln x} + C$.

Тема 16. Інтегрування раціональних дробів

Практичне заняття №16

План

- Інтегрування елементарних раціональних дробів.
- Інтегрування раціональних дробів розкладанням на елементарні дроби.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. $\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7} dx$.

☺

$$\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 7} dx = \left[\begin{array}{l} \text{виділяємо повний квадрат в знаменнику} \\ 2x^2 - 5x + 7 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2\frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}\right) = \\ = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right) \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{5}{4} \\ dt = dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4t}{\sqrt{31}} + c = \\ &= [\text{повертаємось до старої змінної } x] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 5}{\sqrt{31}} + c. \text{ ☺☺} \end{aligned}$$

Приклад 2. $\int \frac{1}{x^2 - 7x - 1} dx$.

☺ $\int \frac{1}{x^2 - 7x - 1} dx = [\text{виділяємо повний квадрат в знаменнику}] =$

$$x^2 - 7x - 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x - 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} - 1 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{53}{4}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{53}{4}} = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{7}{2} \\ dt = dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{53}{4}} = \frac{1}{\sqrt{53}} \cdot \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{53}}{2}}{t + \frac{\sqrt{53}}{2}} \right| + c =$$

$= [\text{повертаємось до старої змінної } x] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{53}} \cdot \ln \left| \frac{x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2}}{x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2}} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{53}} \cdot \ln \left| \frac{2x - 7 - \sqrt{53}}{2x - 7 + \sqrt{53}} \right| + c. \text{☺☺}$$

Приклад 3. $\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$.

☺ Дріб $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ є правильним. Розкладемо його на суму найпростіших дробів. Коренями знаменника є дійсні числа -1 та $-\frac{1}{2}$, серед яких немає кратних. Тому чисельниками кожного дробу будуть числа A, B . Отримаємо:

$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$. Помноживши обидві частини рівності на спільний знаменник, здобудемо:

$$x = A(2x+1) + B(x+1), \text{ або } x = 2Ax + A + Bx + B.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в правій і лівій частинах, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = 2A + B, \\ 0 = A + B, \end{cases} \text{ з якої знайдемо } A = 1, B = -1.$$

Отже, розкладання раціонального дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C = \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} \right| + C. \text{☺☺}$$

Приклад 4. $\int \frac{2x+6}{3x^2+x+3} dx$.

☺ Похідна знаменника $(3x^2+x+3)' = 6x+1$. Виділимо цю похідну у чисельнику:

$$\int \frac{2x+6}{3x^2+x+3} dx = 2 \int \frac{x+3}{3x^2+x+3} dx = \frac{2}{6} \int \frac{6x+18}{3x^2+x+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(6x+1)+17}{3x^2+x+3} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{6x+1}{3x^2+x+3} dx + \frac{17}{3} \int \frac{1}{3x^2+x+3} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \frac{1}{3} \int \frac{6x+1}{3x^2+x+3} dx = \left[\begin{array}{l} t = 3x^2+x+3 \\ dt = (6x+1)dx \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + c = \frac{1}{3} \ln|3x^2+x+3| + c.$$

$$I_2 = \frac{17}{3} \int \frac{1}{3x^2+x+3} dx = \left[\begin{array}{l} 3x^2+x+3 = 3\left(x^2+\frac{1}{3}x+1\right) = \\ = 3\left(x^2+2\frac{1}{6}x+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+1\right) = 3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{17}{3} \int \frac{1}{3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}\right)} dx = \left[\begin{array}{l} t = x+\frac{1}{6} \\ dt = dx \end{array} \right] = \frac{17}{9} \int \frac{dt}{t^2+\frac{35}{36}} dx =$$

$$= \frac{17}{9} \cdot \frac{6}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{6t}{\sqrt{35}} + c = \frac{34}{3\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{6\left(x+\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{35}} + c = \frac{34}{3\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{6\sqrt{35}} + c.$$

Тоді

$$\int \frac{2x+6}{3x^2+x+3} dx = \frac{1}{3} \ln|3x^2+x+3| + \frac{34}{3\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{6\sqrt{35}} + c. ☺☺$$

Приклад 5. $\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx$.

☺ Дріб $\frac{2x+1}{x^3+x}$ є правильним. Розкладемо знаменник дробу на множники:

$x^3+x = x(x^2+1)$. Бачимо, що знаменник має один дійсний корінь $x_1 = 0$ та пару спряжених коренів $x_{2,3} = \pm i$. Тому розкладання дробу на суму найпростіших має вигляд:

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \text{ звідки}$$

$$2x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

$$\begin{cases} 1 = A, \\ 0 = A + B, \quad B = -A = -1, \\ 2 = C. \end{cases}$$

Отже, $\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x+2}{x^2+1} dx.$

Перший інтеграл є табличним $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1.$ Для інтегрування другого доданку розіб'ємо дріб на суму двох дробів: $-\int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{2 dx}{x^2+1}.$ Перший з них інтегруємо, використовуючи заміну змінної:

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C_2 = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C_2.$$

Другий інтеграл дорівнюватиме: $\int \frac{2 dx}{x^2+1} = 2 \arctg x + C_3.$

Таким чином, $\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x + C. \text{ ☺☺}$

Завдання для виконання

Обчислити інтеграли від раціональних функцій:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx.$ | 11. $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+1} dx.$ | 21. $\int \frac{3x-7}{x^2+5x+3} dx.$ |
| 2. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx.$ | 12. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+9} dx.$ | 22. $\int \frac{2x-2}{x^2-8x+1} dx.$ |
| 3. $\int \frac{x}{2x^2+2x+5} dx.$ | 13. $\int \frac{x}{x^2+3x+5} dx.$ | 23. $\int \frac{5x-3}{x^2+3x+9} dx.$ |
| 4. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx.$ | 14. $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+5} dx.$ | 24. $\int \frac{x+7}{x^2+4x+1} dx.$ |
| 5. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx.$ | 15. $\int \frac{4x+1}{x^2+x+1} dx.$ | 25. $\int \frac{3x+7}{x^2+4x-9} dx.$ |
| 6. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx.$ | 16. $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx.$ | 26. $\int \frac{4x+1}{x^2+3x+1} dx.$ |
| 7. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10} dx.$ | 17. $\int \frac{6x+2}{x^2+2x+2} dx.$ | 27. $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-4} dx.$ |
| 8. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+8} dx.$ | 18. $\int \frac{2x+3}{x^2+4x-2} dx.$ | 28. $\int \frac{2x-4}{x^2+2x-2} dx.$ |
| 9. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx.$ | 19. $\int \frac{x-2}{x^2-6x+1} dx.$ | 29. $\int \frac{x-2}{x^2+3x+1} dx.$ |
| 10. $\int \frac{3x+1}{5x^2+2x+1} dx.$ | 20. $\int \frac{x+1}{3x^2+2x+1} dx.$ | 30. $\int \frac{4x+1}{x^2+2x+1} dx.$ |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Розклад правильного раціонального дробу $\frac{2x^2-6}{(x-2)^3}$ на суму елементарних дробів має вигляд

а) $\frac{-3}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}$; б) $\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2}$; в) $\frac{1}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{-3}{x-2}$; г) $\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2}$.

2. Розклад правильного раціонального дробу $\frac{6x-10}{x^2-6x+8}$ на суму елементарних дробів має вигляд

а) $\frac{-1}{x-2} + \frac{7}{x-4}$; б) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4}$; в) $\frac{-2}{x-2} + \frac{5}{x-4}$; г) $\frac{-4}{x-2} + \frac{1}{x-4}$.

3. Невизначений інтеграл $\int \frac{3x^2-2x+4}{x^3-x^2+4x+3} dx$ дорівнює

а) $3 \ln|x^3-x^2+4x+3| + C$; б) $\ln|x^3-x^2+4x+3| + C$;
в) $\ln|3x^2-2x+4| + C$; г) $-\frac{1}{(x^3-x^2+4x+3)^2} + C$.

4. Невизначений інтеграл $\int \frac{x^3}{4x^4+1} dx$ дорівнює

а) $\frac{1}{4} \lg|4x^4+1| + C$; б) $\frac{1}{16} \ln|4x^4+1| + C$; в) $4 \ln|4x^4+1| + C$; г) $\ln|4x^4+1| + C$.

5. Невизначений інтеграл $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ дорівнює

а) $\arctg x^2 + C$; б) $\frac{1}{2} \arctg x^2 + C$; в) $2 \arctg x^2 + C$; г) $\arctg 2x + C$.

Тема 17. Інтегрування ірраціональних дробів

Практичне заняття №17

План

1. Види ірраціональних виразів.
2. Типи підстановок при інтегруванні ірраціональних виразів різних видів.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. ☺ $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)3t^2 dt}{t^2} = 3 \int (t^3-1) dt =$
 $= \frac{3}{4} t^4 - 3t + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C.$ ☺☺

Приклад 2. ☺ $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = HCK(2, 3, 4) \\ dx = 12t^{11} dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11} dt}{t^8 - t^3} =$
 $= 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = 12 \int \frac{t^4(t^{10} - 1 + 1) dt}{t^5 - 1} = 12 \int \left(t^4(t^5 - 1) + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt =$
 $= 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \ln |t^5 - 1| \right) + C = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5} \cdot \sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5} \ln |\sqrt[12]{x^5} - 1| + C.$ ☺☺

Приклад 3. ☺

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x, \quad a = 1 > 0; \\ x + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2, \\ x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)dt}{(2t + 1)^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{(t^2 + t + 1)dt}{(x + t - x)(2t + 1)^2} =$$

$$= \int \frac{t^2 + t + 1}{t(2t + 1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t + 1} + \frac{C}{(2t + 1)^2} \Rightarrow t^2 + t + 1 = A(2t + 1)^2 + Bt(2t + 1) + C \cdot t \Rightarrow \text{☺☺}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{array} \right| = 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2t + 1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t + 1|^3} + \frac{3}{2(2t + 1)} + C,$$

де $t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Завдання для виконання

Обчислити інтеграли від ірраціональних виразів:

1. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$
3. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$
5. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$
7. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$
8. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx.$
9. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}.$
10. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$
12. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$
14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}.$
15. $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}.$
17. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx.$
18. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$
19. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$
20. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}.$
21. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx.$
22. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$
23. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$
24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$
25. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$
26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$
27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$
29. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$
30. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$ дорівнює

- а) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$; б) $2 \ln|x-1| + \ln x + C$; в) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C$; г) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| + C$.

2. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}$ дорівнює

- а) $6\sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$; б) $3\sqrt{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$; в) $6\sqrt[6]{x} \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$; г) $6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$.

3. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt[3]{x}}$ дорівнює

- а) $\sqrt[3]{x^2} - 3 \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$; б) $\sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$; в) $3\sqrt[3]{x} - 3 \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$; г) $3x - \ln|\sqrt[3]{x}+1| + C$.

4. Невизначений інтеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}} dx$ дорівнює

- а) $\arcsin \frac{x^3}{4} + C$; б) $3 \arcsin \frac{x^3}{4} + C$; в) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{x^3}{4} + C$; г) $4 \arcsin x^3 + C$.

5. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$ дорівнює

- а) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + x + C$; б) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} + C$; в) $-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$; г) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$.

Тема 18. Інтегрування тригонометричних виразів

Практичне заняття №18

План

- Інтегрування за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
- Обчислення інтегралів у вигляді добутку тригонометричних функцій.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. ☺ $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2.

☺ $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2} (-dt) =$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \text{ ☺☺}$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned}\odot \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= \int (1 - t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \odot \odot\end{aligned}$$

Приклад 4.

$$\begin{aligned}\odot \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{(1+t^2)^2 (1+t^2) dt}{t^4 (1+t^2)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - 2 \operatorname{ctg} x + C \odot \odot\end{aligned}$$

Приклад 5.

$$\odot \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C \odot \odot$$

Приклад 6.

$$\odot \int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C \odot \odot$$

Завдання для виконання

Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \int \sin^2 x \cos^3 x dx. \quad 2. \int \sin^3 x \cos^3 x dx. \quad 3. \int (1 - \sin 2x)^2 dx. \quad 4. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^3 x} \quad 6. \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}. \quad 7. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx. \quad 8. \int (1 + 2 \cos x)^2 dx.$$

$$9. \int \cos^2 5x dx. \quad 10. \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \quad 11. \int \sin^4 x dx. \quad 12. \int \sin^5 x dx.$$

$$13. \int \sin^3 x \cos^5 x dx. \quad 14. \int \cos^4 x \sin^3 x dx. \quad 15. \int \operatorname{ctg}^4 y dy. \quad 16. \int \sin 5x \sin 6x dx.$$

$$17. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}. \quad 18. \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}. \quad 19. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}. \quad 20. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}. \quad 22. \int (1 + 3 \cos 2x)^2 dx. \quad 23. \int \cos^5 x dx. \quad 24. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

$$25. \int \cos \frac{11}{3} x \cos 3x dx. \quad 26. \int \sin^2 x \cos^4 x dx. \quad 27. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx. \quad 28. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$29. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}. \quad 30. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- Невизначений інтеграл $\int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx$ дорівнює
а) $\ln|\operatorname{arctg} x| + C$; б) $x \operatorname{arctg} x + C$; в) $\ln|1+x^2| + C$; г) $\operatorname{arctg} x \cdot \ln x + C$.
- Невизначений інтеграл $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$ дорівнює
а) $\operatorname{arctg}^4 x + C$; б) $4 \operatorname{arctg}^4 x + C$; в) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}^4 x + C$; г) $3 \operatorname{arctg}^2 x + C$.
- Невизначений інтеграл $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx$ дорівнює
а) $\operatorname{ctg} 2x - x + C$; б) $-\operatorname{ctg} 2x - x + C$; в) $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x - x + C$; г) $-2 \operatorname{ctg} 2x - x + C$.
- Невизначений інтеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ дорівнює
а) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$; б) $4 \sin^4 x + C$; в) $2 \sin 2x + C$; г) $3 \sin^2 x + C$.
- Невизначений інтеграл $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$ дорівнює
а) $\frac{\cos^5 x}{5} + C$; б) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$; в) $5 \cos^5 x + C$; г) $-4 \cos^3 x + C$.

Тема 19. Визначений інтеграл

Практичне заняття №19

План

- Обчислення визначеного інтеграла.
- Формула Ньютона-Лейбніца.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x \sin 2x dx$.

☺ Оскільки $d \cos 2x = (\cos 2x)' \cdot dx = -2 \sin 2x dx$, то $\sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} d \cos 2x$.

Отже, підінтегральний вираз можна записати у вигляді: $-\frac{1}{2} \cos^3 2x \cdot d \cos 2x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos^3 2x \cdot \sin 2x dx &= \int_0^{\pi/4} -\frac{1}{2} \cos^3 2x \cdot d \cos 2x = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^3 2x \cdot d \cos 2x = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\cos^4 2x}{4} \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{8} \left(\cos^4 \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \cos^4 (2 \cdot 0) \right) = -\frac{1}{8} \left(\cos^4 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos^4 (0) \right) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

😊😊

Приклад 2. Обчислити: $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.

😊

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\pi/2} dx - 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 4x dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - (\sin \pi - \sin 0) + \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} (\sin 2\pi - \sin 0) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \pi = \frac{3}{16} \pi\end{aligned}$$

😊😊

Завдання для виконання

Завдання 1. Обчислити інтеграли:

1. $\int_1^2 (x^3 + 5x^2 - 3x) dx$;
2. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;
3. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$;
4. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$;
5. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
7. $\int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \sin x) dx$;
8. $\int_1^8 \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x^3} dx$;
9. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$;
10. $\int_0^3 (1+x)^2 dx$;
11. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$;
12. $\int_0^{\pi} \sin x dx$;

$$\begin{array}{llll}
13. \int_1^4 \frac{4x-2\sqrt{x}}{x} dx; & 14. \int_{-1}^2 2x^2 dx; & 15. \int_1^2 (2x^2+1) dx; & 16. \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx; \\
17. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; & 18. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}; & 19. \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx; & 20. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx; \\
21. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}; & 22. \int_1^2 \frac{x-\sqrt{x}}{x} dx; & 23. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}; & 24. \int_6^{\ln 2} \frac{e^{2x}-3}{e^x} dx; \\
25. \int_0^3 \frac{2dx}{\sqrt{9-x^2}}; & 26. \int_0^1 \frac{3dx}{1-x^2}; & 27. \int_{\frac{1}{3}}^0 5^{3x+1} dx; & 28. \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{dx}{9x^2-1}; \\
29. \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx; & 30. \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{dx}{5x-3}.
\end{array}$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

$$\begin{array}{llll}
1. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}; & \text{а) } \approx 0,32; & \text{б) } \approx 31,79; & \text{в) } 1; \quad \text{г) } \frac{\pi}{20}. \\
2. \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx; & \text{а) } \pi/4; & \text{б) } \pi/6; & \text{в) } \pi/2; \quad \text{г) } \pi/8. \\
3. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}; & \text{а) } \approx 0,55; & \text{б) } \frac{\ln 4 - 1}{(\ln 2)^2}; & \text{в) } 1; \quad \text{г) } \frac{5}{8}\pi. \\
4. \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}; & \text{а) } 0; & \text{б) } 1; & \text{в) } -1; \quad \text{г) } 2. \\
5. \int_0^1 \frac{x^2+1}{4x} dx; & \text{а) } \frac{8}{3}; & \text{б) } \frac{1}{8}; & \text{в) } -\frac{8}{3}; \quad \text{г) } -\frac{1}{8}.
\end{array}$$

Практичне заняття №20

План

1. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
2. Інтегрування частинами.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити: $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

☺ Інтеграл будемо обчислювати, замінюючи змінну:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \quad x_h = 0 \rightarrow t_h = 0 \\ dx = 2t dt \quad x_e = 4 \rightarrow t_e = 2 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) dt = 2t \Big|_0^2 - 2 \ln(t+1) \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln 3 - 2 \ln 1 = 4 - 2 \ln 3. \text{😊😊}$$

Приклад 2. Обчислити: $\int_0^1 x \cdot e^{-2x} dx$.

😊 Інтеграл будемо обчислювати частинами з використанням формули:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$$\int_0^1 x e^{-2x} \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array} \quad \begin{array}{l} e^{-2x} \cdot dx = dv \\ -\frac{e^{-2x}}{2} = v \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{2} dx =$$

$$= -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 = -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} e^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$$

😊😊

Завдання для виконання

Завдання. Обчислити інтеграли:

1. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; $\int_1^2 x e^{-x} dx$; $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^3 x dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 3x dx$; $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x dx}{\sin^3 2x}$
3. $\int_0^2 x \cdot \sqrt{5-x^2} dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$
4. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{3-x^4}}$; $\int_0^1 (x+1) \cdot e^{-2x} dx$; $\int_2^3 \frac{x \cdot dx}{(x-1)(x^2+9)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 3x dx$
5. $\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x}$; $\int_1^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \sin 2x dx$; $\int_0^1 \sin 7x \cdot \cos 3x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$
6. $\int_0^1 x e^{-3x^2} dx$; $\int_0^1 \arctg x dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-8}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$

7. $\int_e^{2e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2 + 4}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx$
8. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$; $\int_0^1 x \cdot e^{3x} dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$
9. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$
10. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; $\int_0^1 \ln(1+x) dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$; $\int_1^2 \frac{dx}{\sin x \cos x}$
11. $\int_0^1 \frac{x \cdot dx}{(x^2+1)^2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \arctg x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^2 x dx$
12. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; $\int_0^1 x \cdot \ln(1+x) dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^6 x}$
13. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) dx$; $\int_3^4 \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \cos 2x dx$
14. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}$; $\int_0^1 x \cdot \sin \pi x dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \cos 2x dx$
15. $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; $\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$; $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$
16. $\int_0^1 e^x (e^x - 1)^5 dx$; $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$
17. $\int_0^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x}$; $\int_0^1 \sin 3x \cdot \cos 7x dx$
18. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x dx$; $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-3)(x-1)}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x}$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tg x}}{\cos^2 x} dx$; $\int_1^2 (x-1) \cdot e^x dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)}$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x}$
20. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$; $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$; $\int_2^3 \frac{x^2 dx}{x^2-x}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^2 x dx$

$$\begin{aligned}
21. & \int_0^1 x \cdot \cos x^2 dx; \quad \int_0^1 \frac{x dx}{e^{2x}}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x+4)(x^2+1)}; \quad \int_0^{\pi/4} \cos^4 x dx \\
22. & \int_0^1 x^2 \sin x^3 dx; \quad \int_0^1 x \cdot \cos(5x+1) dx; \quad \int_1^2 \frac{dx}{x(x+4)}; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} dx \\
23. & \int_0^1 \frac{x dx}{\cos x^2}; \quad \int_0^1 \ln(1+2x) dx; \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{x+1}; \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx \\
24. & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}; \quad \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx; \quad \int_2^3 \frac{x^3 dx}{x-1}; \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x dx \\
25. & \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{3x}{\sin^2 x^2} dx; \quad \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot \sin^2(2x) dx; \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1}; \quad \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos 3x dx \\
26. & \int_0^1 x \cos(1+x^2) dx; \quad \int_{-2}^0 (x+2)e^{-2x} dx; \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+4}; \quad \int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \sin 5x dx \\
27. & \int_0^1 \frac{e^x}{\cos^2 e^x} dx; \quad \int_1^2 (x-1) \cdot \cos(x-1) dx; \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1}; \quad \int_0^{\pi/8} (1+\operatorname{tg}^2 2x) dx \\
28. & \int_0^1 x^4 e^{-2x^5} dx; \quad \int_{-1}^0 (x+1) \cdot \sin x dx; \quad \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^2+2}; \quad \int_0^{\pi/4} (1+\operatorname{ctg}^2 x) dx \\
29. & \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}; \quad \int_0^1 x^3 \cdot \ln(1+x) dx; \quad \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+9}; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \\
30. & \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; \quad \int_1^e x \cdot \ln x dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+4}; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx
\end{aligned}$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- $\int_1^2 \ln(3x+2) dx$: а) $\approx 1,87$; б) $\approx 0,17$; в) $\approx -0,67$; г) $\ln 4 - 1$.
- $\int_0^1 x 2^x dx$: а) $\frac{\ln 4 - 1}{(\ln 2)^2}$; б) $\approx 1,87$; в) $\ln 4 - 1$; г) $\approx 31,79$.
- $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$: а) $\frac{2}{3} 2\sqrt{2-1}$; б) $\approx 0,17$; в) $\ln 4 - 1$; г) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
- $\int_0^2 9\sqrt{x^3+1} x^2 dx$: а) 52; б) 32; в) 51; г) 53.
- $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{5-4x}$: а) $\frac{\pi}{20}$; б) $\approx 0,17$; в) $\approx 0,59$; г) $\frac{2}{3} 2\sqrt{2-1}$.

Тема 20. Застосування визначеного інтеграла

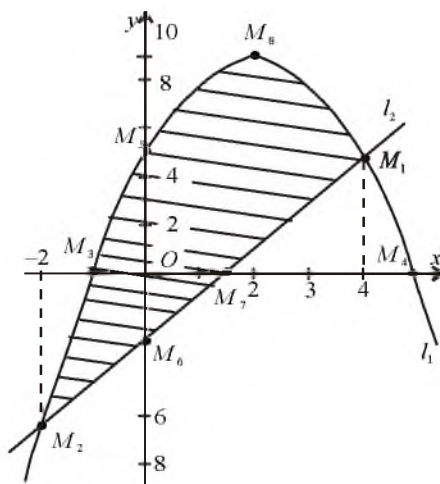
Практичне заняття №21

План

1. Обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.
2. Застосування інтегрального числення у задачах економіки: задача про об'єм виробленої продукції за період.
3. Задача про нерівномірність розподілу прибуткового податку.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4x + 5$ та $y = 2x - 3$.



☺ Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y = -x^2 + 4x + 5$ (l_1) та прямою $y = 2x - 3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболі.

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_1(4; 5) \\ M_2(-2; -7) \end{bmatrix}.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_4(5; 0) \\ M_3(-1; 0) \end{bmatrix}.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0; 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1.5; 0).$$

$$l_2 \cap Oy \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \leftrightarrow M_6(0; -3).$$

Точка $M_8(2; 9)$ — вершина параболи $y - 9 = -(x - 2)^2$.

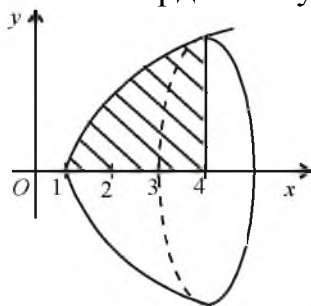
Площа S фігури $M_1M_8M_2$ буде такою:

$$S = \int_{-2}^4 (-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3)) dx = \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right) \Big|_{-2}^4 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 16 + 32 - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 16 \right) = 36. \quad \text{😊😊}$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

😊У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями.



За формулою $V_x = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ об'єм тіла буде таким:

$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (3x - 3) dx = \frac{3\pi}{2} (x - 1)^2 \Big|_1^4 = \frac{27}{2} \pi. \quad \text{😊😊}$$

Завдання для виконання

Завдання 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y = \ln x$
 $y = \ln^2 x$

2. $y = x^2$
 $y^2 = x$

3. $y = x^2$
 $y = 1 - x^2$

4. $y = \arcsin x$
 $x = 0, y = \pi/2$

5. $y = x\sqrt{x}$
 $x = 0, x + y = 2$

6. $y = 4x^2$
 $y = x^3$

7. $y = \cos x$
 $y = \sin x, x = 0$

8. $y = x^2$
 $y = 8x$

9. $y = x^2 - 4x$
 $y = 2x$

10. $y^2 + x^2 = 5$
 $y^2 = 4x$

11. $y = x^2$
 $y = x^5$

12. $x^2 + y^2 = 18$
 $3y^2 = x^2$

13. $y = \sin x$
 $y = \sin^2 x$

14. $y = \cos x$
 $y = \cos^2 x$

15. $x^2 + y^2 = 1$
 $x + y = 1$

$$16. \begin{cases} y = xe^{-x^2} \\ y = 0, x = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} y = \arctg x \\ y = 0, x = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} y = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \\ x = 0; x = 4 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x; y = 2 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = x; x = 2 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} \\ x = 0; x = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} y = \sqrt{2+x} \\ y = x \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} y = \frac{\arctg x}{4} \\ y = \frac{\pi}{4}x \\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{2}{\pi}x \\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} y = \arctg x \\ x = 0; y = 1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} y = \frac{1}{1+x} \\ x = 0; x = e - 1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x = 1; x = e \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = 3-x \end{cases}.$$

Завдання 2. За допомогою визначених інтегралів обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежені лініями:

$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; y = \pm b, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$2. xy = 4; x = 1; x = 4; y = 0, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$3. y^2 = 1 - x; x = 0, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$4. y = x^3; x = 2; y = 0, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$5. y = x^2; y = x + 6, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$6. x^2 - y^2 = a^2; x = \pm a, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$7. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ навколо осі } Oy.$$

$$8. y^2 = 2x + 1; x = 0, \text{ навколо осі } Ox.$$

$$9. \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; y = \pm 3, \text{ навколо осі } Oy.$$

10. $y = x^2; x = 2; y = 0$, навколо осі Ox .
11. $xy = 9; x = 0; y = 3; y = 9$, навколо осі Oy .
12. $y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi; y = 0$, навколо осі Ox .
13. $y = x^3; x = 0; y = 8$, навколо осі Oy .
14. $x^2 - y^2 = 4; x = \pm 2$, навколо осі Oy .
15. $y = x^2; y^2 = x$, навколо осі Ox .
16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, навколо осі Oy .
17. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; x = \pm b$, навколо осі Ox .
18. $xy = 4; x = 1; x = 4; x = 0$, навколо осі Oy .
19. $y^2 = 1 - x; y = 0$, навколо осі Ox .
20. $y = x^3; x = 0; y = 2$, навколо осі Ox .
21. $y = x^2; y = x + 6$, навколо осі Oy .
22. $x^2 - y^2 = a^2; x = \pm a$, навколо осі Oy .
23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, навколо осі Ox .
24. $y^2 = 2x + 2; x = 0$, навколо осі Oy .
25. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; y = \pm 3$, навколо осі Oy .
26. $y = x^2; x = 4; y = 0$, навколо осі Ox .
27. $xy = 9; y = 1; y = 4; x = 0$, навколо осі Oy .
28. $y = \cos x; 0 \leq x \leq \pi; y = 0$, навколо осі Ox .
29. $y = x^3; x = 0; y = 2$, навколо осі Oy .
30. $x^2 - y^2 = 4; x = \pm 1$, навколо осі Oy .

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Площа якої фігури в системі координат Oxy обчислюється за допомогою

визначеного інтеграла $S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$?

- а) Площа криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = 1, x = 2, y = 0, y = x^2$;
- б) Площа криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = -2, x = 2, y = 1, y = x^2$;
- в) Площа криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = 0, x = 2, y = 0, y = x^2$;
- г) Площа криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $x = 0, x = 2, y = x^2, y = 4$.

2. Чому дорівнює площа S плоскої області $D: y = x^2; y = 2 - x^2$?
 а) $2\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{4}$; в) $4\frac{1}{2}$; г) $2\frac{1}{3}$.
3. Чому дорівнює довжина l дуги кривої $L: y = \ln(x^2 - 1); x \in [2; 3]$?
 а) $\pi/3$; б) $1 + \ln(3/2)$; в) $2 - \ln 3$; г) $\sqrt{3}/2$.
4. Яка фігура при обертанні навколо осі Ox утворює тіло з об'ємом $V = \pi \int_0^4 4x dx = 4\pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 32\pi$?
 а) Криволінійна трапеція, що обмежена лініями $x = 0, x = 4, y = 1, y = 2\sqrt{x}$;
 б) Криволінійна трапеція, що обмежена лініями $x = 0, x = 4, y = 0, y = 4x$;
 в) Криволінійна трапеція, що обмежена лініями $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2x$;
 г) Криволінійна трапеція, що обмежена лініями $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2\sqrt{x}$.
5. Чому дорівнює об'єм V тіла, утвореного обертанням плоскої області $D: y = \ln x; y = 0; x = e$ навколо осі Ox ?
 а) $\pi(e - 2)$; б) $\pi(e - 1)$; в) $\frac{\pi(e - 1)}{4}$; г) $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Тема 21. Диференціальні рівняння першого порядку

Практичне заняття №22

План

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{x e^{x^2}}{y^2 + 1}$.

☺ Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Виражаємо y' через

диференціали x і y : $y' = \frac{dy}{dx}$. Матимемо: $\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot e^{x^2}}{y^2 + 1}$.

Помножимо обидві частини даного рівняння на $(y^2 + 1)dx$:

$$(y^2 + 1)dy = x \cdot e^{x^2} dx.$$

В одержаному співвідношенні змінні відокремлені: ліва частина містить лише y і dy , а права тільки x і dx . Тому, проінтегруємо його обидві частини:

$$\int (y^2 + 1)dy = \int x \cdot e^{x^2} dx.$$

Обчислимо обидва інтеграла:

$$\int (y^2 + 1)dy = \int y^2 dy + \int dy = \frac{y^3}{3} + y.$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Підставивши обчислені інтеграли в диференціальне рівняння, одержимо:

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$ | 11. $(1+x)ydx + (1-y)x dy = 0$ | 21. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$ |
| 2. $y' = 2xy$ | 12. $y' = 2\sqrt{y}$ | 22. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$ |
| 3. $xy' - y = 0$ | 13. $x^2 dy - \frac{y^3 dx}{2} = 0$ | 23. $(1+x^2)dy + ydx = 0$ |
| 4. $yy' + x = 0$ | 14. $y' + y \operatorname{tg} x = 0$ | 24. $e^{-y}(1+y') = 1$ |
| 5. $x^2 y' + 2xy = 3y$ | 15. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | 25. $y^2 dy + \operatorname{ctg} x dx = y^3 \operatorname{ctg} x dx$ |
| 6. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$ | 16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ | 26. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2 - 5}$ |
| 7. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ | 17. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ | 27. $x^2 y' + 2xy = 3y$ |
| 8. $\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)y' = y$ | 18. $(x^2 + 2x)y' = 2y + 1$ | 28. $xy' = e^y$ |
| 9. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ | 19. $y' = 2^{x-y}$ | 29. $x^2 dy - \frac{y^3}{2} = 0$ |
| 10. $x^2 y' + y = 0$ | 20. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$ | 30. $(5+x^2)dy + \sqrt{7-y^2} dx = 0$ |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- Загальним розв'язком рівняння $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$ є:

а) $y = \frac{1}{x}e^c$;	б) $y = \frac{1}{x}$;	в) $y = \frac{1}{x}e$;	г) $y = \frac{e}{x}$.
---------------------------	------------------------	-------------------------	------------------------
- Загальним розв'язком рівняння $y' = \frac{y}{x+y}$ є:

а) $\ln Cy$;	б) $\ln(Cy)^y$;	в) $\ln \frac{x}{y}$;	г) $(Cy)^y$.
---------------	------------------	------------------------	---------------
- Загальним розв'язком рівняння $xy' - 4y = x^2 \cdot \sqrt{y}$ є:

а) $y = x^3(C + \frac{1}{2} \ln x)^2$;	б) $y = x^2(C + \frac{1}{2})^2$;	в) $y = x^3(C + \frac{1}{2})$;	г) $y = x^4(C + \frac{1}{2} \ln x)^2$.
---	-----------------------------------	---------------------------------	---

4. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y' = \frac{x+y}{x}$ є:

- а) $y = x \ln Cx$; б) $y = \ln C$; в) $y = x \ln C$; г) $y = \ln Cx$.

5. Загальний розв'язок задачі Коші $y' = 5\frac{x+y}{x}; y(1) = 1$ має вигляд:

- а) $y = \frac{1}{4}(9x^5 - 5x)$; б) $y = \frac{1}{3}(8x^4 - 5x)$; в) $y = \frac{1}{2}(10x^6 - 4x)$; г) $y = \frac{1}{4}(8x^2 - 2x)$.

Практичне заняття №23

План

1. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sin \frac{y}{x}}$.

☺Маємо однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Зробимо заміну змінної $\frac{y}{x} = u$; $y = u \cdot x$; $y' = u' \cdot x + u$

Після заміни змінної рівняння набуде вигляду:

$$u'x + u - u = \frac{1}{\sin u} \quad \text{або} \quad u'x = \frac{1}{\sin u}; \quad u' = \frac{du}{dx} -$$

За означенням $x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin u}$

Помножимо обидві частини рівняння на $\frac{\sin u \cdot dx}{x}$ і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\sin u \cdot du = \frac{dx}{x}$$

Після інтегрування, отримаємо:

$$\int \sin u \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\cos u = \ln Cx \quad \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| 1. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ | 2. $y' - \frac{y}{x} = x \sin^2 x \cos^2 x$ | 3. $y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}$ |
| 4. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$ | 5. $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$ | 6. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$ |
| 7. $xyy' = y^2 + 2x^2$ | 8. $y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ | 9. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ |

10. $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ 11. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ 12. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$
13. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ 14. $y' = \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ 15. $\frac{xy' - y}{x} = \cos \frac{y}{x}$
16. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ 17. $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$ 18. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$
19. $xy' = y + \sin \frac{2y}{x}$ 20. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$ 21. $xy' - \sqrt{x^2 - y^2} = y$
22. $y' - \frac{1}{x}y = x \sin^3 x$ 23. $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ 24. $x^2 y' = y^2 + xy$
25. $y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x$ 26. $xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y$ 27. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$
28. $xy' \sin \frac{3y}{x} + x = y \sin \frac{3y}{x}$ 29. $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ 30. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Загальним розв'язком диференціального рівняння $xy' - y \ln y = 0$ є:
 а) $y = \ln C_x$; б) $y = e^{C_x}$; в) $y' = \ln C_x$; г) $y' = e^{C_x}$.
2. Розв'язком диференціального рівняння $(x^2 y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx$ є:
 а) $\frac{x+y'}{xy} = C_x$; б) $\frac{x+y}{xy} = \ln C_x$; в) $\frac{x+y}{xy} = \ln \frac{x}{y} = C$; г) $x + y' = \ln \frac{x}{y} + C$.
3. Вкажіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - y = e^x$:
 а) $y = e^x(C - x)$; б) $y = e^x(C + x^2)$; в) $y = e^x(2C + x)$; г) $y = e^x(C + x)$.
4. Загальним розв'язком диференціального рівняння $y' - \operatorname{ctgx} \cdot y = \sin x$ є:
 а) $y = \sin x \cdot (C + x)$; б) $y = \cos x \cdot (C + x)$; в) $y = \sin x \cdot (C - x)$; г) $y = \cos x \cdot (C - x)$.
5. Однорідне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:
 а) $P(x, y)dx - Q(x, y)dy = 0$; б) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$;
 в) $Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$; г) $P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$.

Практичне заняття №24

План

1. Рівняння Бернуллі.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y = 2 \cdot x$.

☺Маємо лінійне диференціальне рівняння. Скористаємось методом Бернуллі. Робимо заміну: $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

$$u' \cdot v + v' \cdot u + \frac{x}{x^2 + 1} u \cdot v = 2x;$$

$$\begin{cases} v'u + \frac{x}{x^2+1}uv = 0 \Rightarrow v' + \frac{x}{x^2+1}v = 0; \\ u'v = 2x \end{cases}$$

$$v' = -\frac{x}{x^2+1} \cdot v; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{x^2+1}v; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{x dx}{x^2+1}.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$\ln v = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2), \text{ або } \ln v = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$v = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ тобто } v = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Підставимо знайдене значення в друге рівняння системи:

$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2x, \text{ або } u = 2x \cdot \sqrt{1+x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot \sqrt{1+x^2}; \quad du = 2x\sqrt{1+x^2} dx;$$

$$\int du = \int 2x \cdot \sqrt{1+x^2} dx;$$

$$u = \int \sqrt{1+x^2} d(x^2+1) = \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C;$$

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C;$$

$$y = u \cdot v = \left(\frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{3} (1+x^2) + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y - 3y = x \cdot y^2$.

☺Маємо рівняння Бернуллі. Скористаємось методом Бернуллі:

$$y = u \cdot v; \quad y' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

$$u' \cdot v + v' \cdot u - 3 \cdot u \cdot v = x \cdot u^2 \cdot v^2;$$

$$\begin{cases} v' - 3v = 0 & v' = 3v; & \frac{dv}{dx} = 3v; & \frac{dv}{v} = 3dx; \\ u'v = xu^2v^2; & \ln v = 3x; & v = e^{3x}. \end{cases}$$

$$u' = xu^2v; \quad u' = x \cdot u^2 \cdot e^{3x}; \quad \frac{du}{dx} = u^2 x e^{3x}; \quad \frac{du}{u^2} = x e^{3x} dx.$$

Можна інтегрувати:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int x e^{3x} dx; \quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}.$$

$$\int x e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u \quad e^{3x} dx = dv \\ dx = du \quad \frac{e^{3x}}{3} = v \end{array} \right\} = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C; \quad u = \frac{1}{\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C}.$$

$$y = uv = \frac{e^{3x}}{\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C} = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C e^{-3x}}. \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y' = y^2 \cdot \cos 2x$ $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$
2. $y' = x - \frac{y}{x}$ $y' = 4\frac{y}{x} + x\sqrt{y}$
3. $y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$ $y' = -\frac{y}{x} - xy^2$
4. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1+x$ $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$
5. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$
6. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ $y dx + \left(x - \frac{1}{2} x^3 y \right) dy = 0$
7. $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$ $y' = 2xy + y^3$
8. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$ $y' + y = \frac{1}{y}$
9. $y' = \frac{x \ln x}{\cos^3 2y}$ $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
10. $y' - \frac{(2x-1)}{x^2} y = 1$ $y' + \frac{y}{x} = y^2$
11. $y' = \frac{x e^{-3x}}{\cos^2 y + \sin^2 y}$ $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0$
12. $\sqrt{a^2 + x^2} dy + (x + y - \sqrt{a^2 + x^2}) dx = 0$ $y' + y = \frac{1}{y}$
13. $y' = \frac{e^{-2y}}{y(1+\sqrt{x})}$ $y' = \frac{\sin x \cdot e^{\cos x}}{4 + \sqrt{y}}$
14. $\sqrt{a^2 + x^2} dy + (x + y - \sqrt{a^2 + x^2}) dx = 0$ $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$
15. $y' = \frac{x^2 + \sqrt{2+x}}{\cos^3 y}$ $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x}{y}}$
16. $y' = \frac{2}{x+1} y + x$ $y' - \frac{3y}{x} = y^2$
17. $y' = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^3 y}$ $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x} + 1$
18. $y' + \frac{2}{x} y = \sqrt{x+1}$ $y' - \frac{2}{x} y = \frac{1}{\sqrt{y}}$
19. $y' = e^{-5x} \cdot \sqrt{1+2y}$ $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{y}{x}}}$
20. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$ $y' - 3y = x \cdot y^2$

9.

$$y' = \frac{xe^{-3x}}{\sin^3 y}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$$

10.

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y' + y = \frac{\cos x}{y}$$

$$y' = \frac{\arctg x}{1+e^{-y}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$y' - \frac{y}{\lg x} = 1$$

$$y' - y = 2y^2$$

11.

$$y' = \frac{\ln \sqrt{1+x}}{(x+1)(1+\sqrt{y})}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{y}{x}\right)}$$

12.

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x$$

$$y' - y = y^2$$

$$y' = \frac{\sqrt{4+3x}}{y \cdot e^{-y}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$y' - \frac{y}{x} = \ln x$$

$$y' = \frac{y}{x} + y^3$$

13.

$$y' = \frac{\sqrt{y+3}}{\cos^4 x}$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$y' + \frac{2y}{x} = y^2$$

14.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 y \cdot \sin x}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$y' = \frac{1 + \sqrt{y}}{1 + \lg^2 x}$$

$$y' - \frac{2y}{x} = y^3$$

15.

$$y' = \frac{x + 3\sqrt{x} + 1}{\arctg y}$$

$$y' = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' - \frac{y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$y' = -\frac{2y}{x} + \sqrt{y}$$

16.

$$y' = \frac{\cos \ln x}{x(y^2 + 4)}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \arctg \frac{y}{x}$$

$$y' + 4y = e^{-4x} \cdot \ln(1+x) \quad y' - 3y = \frac{e^{6x}}{x(1+y)y}$$

23.

$$y' = \frac{\ln \sqrt{1+x}}{(y+1)e^{-2y}}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \arctg \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{1}{2\sqrt{x}} y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x \quad y' - y = x\sqrt{y}$$

24.

$$y' = \frac{\lg \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+2y}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1 + \frac{y}{x}}{\ln \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)}$$

$$y' + \frac{2xy}{x+1} = xy^2$$

$$y' - xy = \frac{x}{y}$$

25.

$$y' = \frac{\sin^2 y}{\sin^4 x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y^2} + 1$$

$$y' + \frac{x^2 y}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)^2}$$

$$y' = y + \frac{1}{y^2} x$$

26.

$$y' = \frac{y \ln y}{1 + \lg^2 x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{2 + 3 \frac{y}{x}}$$

$$y' + y = xe^{-2x}$$

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

27.

$$y' = \frac{y + y^3}{x\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

$$y' = \frac{1}{x^2} y + \frac{1}{x^2 y}$$

$$y' = \frac{x}{1+x} y + \frac{e^x}{1+x^2}$$

28.

$$y' = \frac{yx + x^2}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \sin y}{1 + \sin^2 x}$$

$$y' + 2y = \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{-2x}$$

$$y' - y = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{y^2}$$

17.

$$y' = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{(1+y^3)\cos^2 x}$$

$$y' + 2y = e^{2x} \cdot \cos^2 x$$

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{4+2\frac{y}{x}}}$$

$$y' + \frac{2}{x+1}y = x \cdot y^2$$

29.

$$y' = \frac{4\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \ln(1+y)}$$

$$y' + y = \frac{e^{-x}(1-x)}{1+x}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \cos\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$y' + \sqrt{x}y = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{x} \cdot y^2$$

30.

$$y' = \frac{9+y^2}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}}$$

$$y' - 5y = \frac{e^{5x}}{x(x^2+4)}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \cos\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$y' + 2y = \frac{x^2}{x^2+4} \cdot e^{2x} \cdot y^2$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Загальним розв'язком рівняння $2^{x+y} + 3^{x-2y} y' = 0$ є:

а) $\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln \frac{2}{3}} - \frac{1}{18^y \cdot \ln 18} = C$; б) $\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln \frac{2}{3}} - \frac{1}{15^y \cdot \ln 15} = C$; в) $\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln \frac{2}{3}} - \frac{1}{18^y \cdot \ln 18} = C$; г) $\frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln 3} - \frac{1}{157 \cdot \ln 18} = C$.

2. Загальним розв'язком рівняння Бернуллі $x^2 y^2 \cdot y' + xy^3 = 1$ є:

а) $x(C + \frac{2}{3}x^2)$; б) $x(C + \frac{2}{3}x^2)^{\frac{1}{2}}$; в) $x(C + \frac{2}{3}x^2)^{\frac{1}{3}}$; г) $\frac{1}{x(C + \frac{2}{3}x^2)^{\frac{1}{3}}}$.

3. Розв'язок задачі Коші $y' = 3y^{2/3}; y(2) = 0$ має вигляд:

а) $y = (x-2)^3$; б) $y = 2 + C$; в) $y = 2 + C(x+1)$; г) $y = x - 2$.

4. Загальний розв'язок рівняння Бернуллі $xy' - y^2 \cdot \ln x + y = 0$ має вигляд:

а) $\frac{1}{x(2C - \ln^2 x)}$; б) $\frac{2}{2C - \ln^2 x}$; в) $\frac{2}{x(2C - \ln^2 x)}$; г) $\frac{2}{x(C - \ln^2 x)}$.

5. Рівняння Бернуллі має вигляд:

а) $y' + P(x, y) = Q(x, y) \cdot y$;

б) $y' + P(x, y) = Q(x, y) \cdot y^n$;

в) $y' + P(x, y) = Q(x, y)$;

г) $y' + P(x, y) = Q(x) \cdot y^n$.

Практичне заняття №25

План

1. Макроскопічні моделі динаміки національного доходу.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Модель природного зростання випуску

☺Вважатимемо, що деякий товар продається за ціною p . Позначимо через $Q(t)$ кількість товару, реалізованого на момент часу t . Тоді на цей момент часу отримано прибуток, що дорівнює $pQ(t)$. Нехай деяка частина прибутку витрачається на інвестиції у виробництво товару, який реалізується:

$$I(t) = kpQ(t), k = \text{const}, 0 < k < 1, \quad (1)$$

де k - норма інвестиції.

Якщо виходити з припущення, що ринок не насичується, то в результаті розширення виробництва буде отримано приріст прибутку, частина якого буде використана для розширення випуску товару. Це приведе до зростання швидкості випуску (акселерація), причому швидкість випуску пропорційна до збільшення інвестицій :

$$Q' = cI, \quad (2)$$

де c - норма акселерації. Підставивши в (2) формулу (8.1.), дістанемо

$$Q' = lQ, l = ckp. \quad (3)$$

Диференціальне рівняння (3) є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q = Ce^{lt}, C = \text{const}.$$

Зауваження. Відомо, що процес розмноження бактерій також описується рівнянням (3). Процес радіоактивного розпаду починається із закономірності, встановленої рівнянням (8.3). ☺☺

Приклад 2. Зростання випуску в умовах конкуренції

☺Нехай $p = p(Q)$ - спадна функція, тобто зі збільшенням обсягу продукції на ринку ціна спадає: $\frac{dp}{dQ} < 0$. З формул 1-3 дістанемо нелінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно Q :

$$Q' = \gamma(Q)Q, \gamma = kc \quad (4)$$

Оскільки всі множники у правій частині цього рівняння додатні, то $Q' > 0$, тобто функція $Q(t)$ - зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною. З рівняння (4) дістанемо

$$Q'' = \gamma \left[Q'p(Q) + Q \frac{dp}{dQ} Q' \right] = \gamma Q' \left(p + \frac{dp}{dQ} Q \right).$$

Цю рівність можна перетворити, якщо ввести еластичність попиту

$\varepsilon(p) = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$. Звідси $Q'' = \gamma Q' p \left(1 + \frac{dp}{dQ} \frac{Q}{p} \right)$, або (оскільки $\frac{dQ}{dp} < 0$, то $\varepsilon < 0$) остаточно матимемо:

$$Q'' = \alpha Q' p \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon|} \right). \quad (5)$$

З рівняння (5) маємо:

- у разі еластичного попиту ($|\varepsilon| > 1, Q'' > 0$)- прогресуюче зростання;
- у разі нееластичного попиту ($|\varepsilon| < 1, Q'' < 0$)- уповільнене зростання.

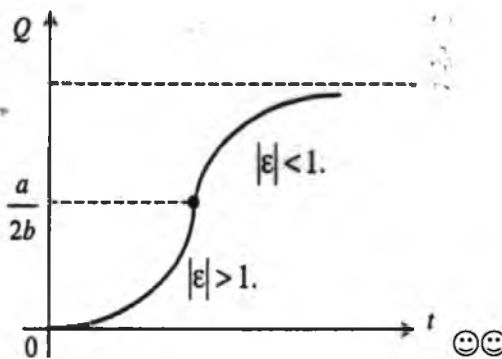
Зокрема, якщо $p(Q) = a - bQ, a > 0, b > 0$, рівняння (5) набирає вигляду

$$Q' = \gamma(a - bQ)Q. \quad (6)$$

Звідси

$$Q'' = \gamma Q'(a - 2bQ). \quad (7)$$

Зі співвідношень (6) і (7) дістанемо $Q' = 0$ при $Q = 0$ і $Q = \frac{a}{b}, Q'' > 0$ при $Q > \frac{a}{(2b)}$ і $Q = \frac{a}{(2b)}$ - точка перетину функції Q . Графік цієї функції називають логістичною кривою.



Завдання для виконання

1. Законом природного зростання називають такий закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини. Треба знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент часу, тобто при $t=0$, кількість речовини дорівнювала y_0 .
2. Швидкість зростання кількості населення пропорційна кількості населення. Знайти закон зростання населення держави, в якій у 1990 році було 50 млн. населення. Яка кількість населення буде у 2000 році?
3. Швидкість зростання кількості населення пропорційна кількості населення. Знайти закон зростання населення держави, в якій у 2000 році було 70 млн. населення. Яка кількість населення буде у 2010 році?
4. Швидкість зростання кількості населення пропорційна кількості населення. Знайти закон зростання населення держави, в якій у 2010 році було 60 млн. населення. Яка кількість населення буде у 2020 році?
5. Відносно попиту кількості одиниць x певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яка визначається формулою $\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$, постійна і дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

6. Описати динаміку росту випуску продукції і знайти обсяг продукції, виробленої галуззю за час $t=10$ років, якщо ціна P одиниці продукції становить 10,3 грош. од., сума інвестицій пропорційна доходу з коефіцієнтом пропорційності $m=0.3$, підвищення швидкості випуску пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності $l=6$. Відомо, що в початковий момент часу t_0 обсяг продукції становив $Q_0 = 6$ од.

7. Описати динаміку росту випуску продукції і знайти обсяг продукції, виробленої галуззю за час $t=5$ років, якщо ціна P одиниці продукції становить 6,3 грош. од., сума інвестицій пропорційна доходу з коефіцієнтом пропорційності $m=0.1$, підвищення швидкості випуску пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності $l=4$. Відомо, що в початковий момент часу t_0 обсяг продукції становив $Q_0 = 3$ од.

8. Описати динаміку росту випуску продукції і знайти обсяг продукції, виробленої галуззю за час $t=8$ років, якщо ціна P одиниці продукції становить 9,5 грош. од., сума інвестицій пропорційна доходу з коефіцієнтом пропорційності $m=0.2$, підвищення швидкості випуску пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності $l=7$. Відомо, що в початковий момент часу t_0 обсяг продукції становив $Q_0 = 5$ од.

9. Описати динаміку цін, якщо функції попиту і пропозиції мають вигляд $Q(P) = 8-4P$, $S(P) = 2 + 6P$ і збільшення ціни прямопропорційне різниці попиту і пропозиції з коефіцієнтом 4, причому у початковий момент часу t_0 ціна $P(t_0)=2$. Побудувати схематично графік.

10. Описати динаміку цін, якщо функції попиту і пропозиції мають вигляд $Q(P) = 7-3P$, $S(P) = 3 + 7P$ і збільшення ціни прямопропорційне різниці попиту і пропозиції з коефіцієнтом 5, причому у початковий момент часу t_0 ціна $P(t_0)=3$. Побудувати схематично графік.

11. Описати динаміку цін, якщо функції попиту і пропозиції мають вигляд $Q(P) = 5-2P$, $S(P) = 4 + 6P$ і збільшення ціни прямопропорційне різниці попиту і пропозиції з коефіцієнтом 2 причому у початковий момент часу t_0 ціна $P(t_0)=6$. Побудувати схематично графік.

12. Гіпотеза «перманентного доходу» М. Фрідмена. Нехай динаміка агрегованого споживання задана дискретним детермінованим процесом $(c_t, t = 1, 2, \dots, T)$ і сукупний споживач, діючи раціонально, максимізує корисність у

кожен момент часу t : $\max U(c_t)$ за умови: $\sum_{t=1}^T c_t \leq \sum_{t=1}^T Y_t$,

де Y_t - вироблений дохід. За гіпотез ненасичення (споживач прагне отримати більший обсяг споживання), точного передбачення та відсутності дисконтування показати, що:

а) оптимальні значення обсягів споживання у різні моменти дорівнюють:

$$c_1^* = c_2^* = \dots = c_T^* = c^*;$$

б) оптимальний обсяг споживання дорівнює: $c^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$;

в) реакція раціонального споживача у кожен момент (наприклад, зберігати $S_t = Y - c^*$) залежить від потоку доходу в майбутньому.

(Вказівка: скласти функцію Лагранжа й продиференціювати її по кожному значенню c_t .)

13. Для рівняння рівноваги на реальному ринку

$$Y = D(Y^D, r - \pi, A) + G, \quad 0 < D_1 < 1; \quad D_2 < 0; \quad D_3 > 0$$

і доходу до розпорядження $Y^D = Y - T + rb - \pi A$ обчислити такі значення:

а) чутливість приватного попиту до зміни ставки відсотка D_r . Показати, що її знак залежить від співвідношення «ефекту доходу» та «ефекту заміщення»;

б) чутливість приватного попиту до зміни активів D_A^b і D_A^m . Показати, що їх вигляд залежить від «номінального якоря», тобто умови або $m = \bar{m} = \text{const}$, або $b = \bar{b} = \text{const}$, а знак — від співвідношення «ефекту доходу» й «ефекту заміщення».

14. Нехай портфель активів заданий виразом: $A = \frac{1}{p}(M + p_b B + p_k K)$,

де p_k - ціна одиниці фізичного капіталу; p_b - ціна одиниці фінансового активу, а B, K - обсяги відповідно фінансових і фізичних активів.

15. Ставка дохідності фізичного капіталу подається рівнянням:

$$r_k = \frac{p}{p_k} \frac{\partial Y}{\partial K} \equiv \frac{pR}{p_k}, \quad \text{де} \quad R \equiv MCR \equiv \frac{\partial Y}{\partial K} - \text{граничний продукт капіталу. Потрібно}$$

показати, що вартість компоненти портфеля, що складається з фізичного капіталу (компонента), не залежить від ціни одиниці фізичного капіталу.

16. Показати, що залежність номінальної пропозиції грошей від ставки відсотка $M(r)$ не змінює якісної картини рівноваги грошового ринку, чи, іншими словами, кут нахилу кривої LM зменшується порівняно зі стандартним випадком незалежності номінальної пропозиції грошей від ставки відсотка. Побудувати графіки цих кривих.

(Вказівка: необхідно скористатися рівнянням рівноваги грошового ринку.)

17. Обчислити чутливість агрегованого попиту до зміни цін для гіпотези доходу

$$\text{до розпорядження: } Y^D = Y - T + r \frac{(M + \bar{B})}{p} - \pi \frac{(M + \bar{B})}{p}$$

і «номінального якоря»: $B = \bar{B} = \text{const}$. Показати, що $\frac{\partial Y^*}{\partial p} < 0$, тобто крива агрегованого попиту має стандартний вигляд за умов:

$$D^1 < 0;$$

$$D^1 = \left[D_A^m \frac{M + \bar{B}}{p^2} - D_1 r \frac{\bar{B}}{p^2} \right] \text{ і}$$

$$D_A^m > 0, \text{ а також } M^1 > 0;$$

$$M^1 = [M - L_3(M + \bar{B})].$$

(Вказівка: необхідно скористатися рівнянням рівноваги реального ринку.)

- 18.** Для статичного блоку макроекономічної моделі Сарджента-Тарновського обчислити чутливість точки рівноваги до зміни інфляційних очікувань Y_{π}^* , r_{π}^* , p_{π}^* і пояснити їхній економічний зміст.
- 19.** Швидкість знецінення обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0 . Якою буде вартість використання впродовж t років?
- 20.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(2 - y)$ і $y(0)=1$. (t вимірюють в днях).
- 21.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(6 - y)$ і $y(0)=3$. (t вимірюють в днях).
- 22.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = 2y(3 - y)$ і $y(0)=1$. (t вимірюють в днях).
- 23.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(8 - y)$ і $y(0)=4$. (t вимірюють в днях).
- 24.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(9 - y)$ і $y(0)=3$. (t вимірюють в днях).
- 25.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = 3y(3 - y)$ і $y(0)=4$. (t вимірюють в днях).
- 26.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = 3y(1 - y)$ і $y(0)=1$. (t вимірюють в днях).
- 27.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(3 - y)$ і $y(0)=2$. (t вимірюють в днях).
- 28.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(10 - y)$ і $y(0)=6$. (t вимірюють в днях).
- 29.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = 2y(6 - y)$ і $y(0)=3$. (t вимірюють в днях).
- 30.** Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(4 - y)$ і $y(0)=2$. (t вимірюють в днях).

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Форми зображення математичної моделі:
 - а) інваріантна, таблична, графічна;
 - б) схемна, алгоритмічна, аналітична, інваріантна;
 - в) графічна, алгоритмічна, інваріантна;
 - г) схемна, графічна, таблична, аналітична.
2. Аналітична форма зображення математичної моделі – це:
 - а) зображення математичної моделі безвідносно до методів, за допомогою яких може розв'язуватися поставлена задача моделювання;
 - б) зображення математичної моделі у вигляді послідовних дій, які необхідно виконати, щоб розв'язати поставлену задачу;
 - в) зображення математичної моделі у вигляді формул та співвідношень між математичними виразами, за допомогою яких шукані в задачі результати визначаються через відомі дані;
 - г) зображення математичної моделі у вигляді таблиць, діаграм, схем, графіків.
3. Диференціальним рівнянням називається:
 - а) рівняння, що містить частинні похідні шуканої функції;
 - б) рівняння, що не містить похідні шуканої функції;
 - в) рівняння, що містить похідні шуканої функції;
 - г) рівняння, що не містить частинні похідні шуканої функції.
4. Порядком диференціального рівняння називається:
 - а) найнижчий порядок похідної функції;
 - б) найвищий степінь функції;
 - в) найвищий порядок похідної функції;
 - г) найнижчий степінь функції.
5. Диференціальне рівняння першого порядку в загальному вигляді можна подати так:
 - а) $F(x, y, y') = 0$;
 - б) $F(x, x', y') = 0$;
 - в) $F(x, y', y) = 0$;
 - г) $F(x, x', y) = 0$.

Тема 22. Диференціальні рівняння другого порядку

Практичне заняття №26

План

1. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - y = x$.

☺Спочатку розв'яжемо відповідне даному однорідне диференціальне рівняння:

$$y'' - y = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{-x}$$

Права частина вихідного рівняння є квазімногочленом з параметрами:

$$n = 1, \alpha = 0, \beta = 0.$$

Комплексне число $z = \alpha + i\beta$ не співпадає з коренями характеристичного рівняння ($z = 0$). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд: $\Psi(x) = Ax + B$. Для обчислення A і B підставимо $\Psi(x)$ замість y в вихідне рівняння. Тоді одержимо:

$$\Psi'(x) = A \quad \Psi''(x) = 0 \quad 0 - (Ax + B) = x$$

Остання рівність виконується при $\forall x$. Це можливо лише в тому випадку, коли коефіцієнти при однакових степенях x співпадають. Прирівнявши коефіцієнти, одержимо:

$$\begin{array}{l} x \mid -A = 1 \\ x^0 \mid -B = 0 \end{array}$$

Таким чином $\Psi(x) = -x$. Згідно з теоремою про загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння, матимемо:

$$y = \Phi(x) + \Psi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x \quad \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

Завдання. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y'' + 3y' + 4y = 3 \sin 5x$ | 11. $y'' + 5y' - 6y = 3e^x$ | 21. $y'' - 4y' = 3x + 4$ |
| 2. $y'' - 4y = x^2 + 3$ | 12. $y'' + y' = x + 4$ | 22. $y'' + 2y' - y = 2xe^x$ |
| 3. $y'' - 4y' + 3y = 5e^x$ | 13. $y'' - 8y' + 16y = \cos 3x$ | 23. $y'' + 17y = 0$ |
| 4. $y'' + 4 = 3 \cos x + 3 \sin x$ | 14. $y'' - 9y = 2e^{3x}$ | 24. $y'' + 5y' - 6y = \cos 2x$ |
| 5. $2y'' - y' - y = 3x - x^2$ | 15. $4y'' - y' - 3y = x^2 + 4x$ | 25. $3y'' - y' - 2y = x^2 + 2x - 3$ |
| 6. $5y'' + y' - 6y = 2e^{4x}$ | 16. $y'' + 3y' = \sin 4x$ | 26. $y'' + 5y' - 6y = x^2 - 3$ |
| 7. $y'' + 3y' = x + 5$ | 17. $y'' + 2y' = xe^{-x}$ | 27. $y'' + y' = 2 \cos 3x$ |
| 8. $3y'' + y' - 4y = 3e^x$ | 18. $2y'' - 3y' + y = 4x - 3x^2$ | 28. $y'' + 5y' + 4y = 3e^{3x}$ |
| 9. $y'' - 9y = 3 \cos 2x$ | 19. $y'' + 5y' - 6y = \cos 2x$ | 29. $y'' + 4y' = 2x - 3$ |
| 10. $y'' + 9y = x^2 + 4$ | 20. $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$ | 30. $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$ |

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- Для диференціальних рівнянь другого порядку має місце теорема:
а) Ферма; б) Ролля; в) Лагранжа; г) Коші.
- Які з диференціальних рівнянь другого порядку допускають пониження порядку?
а) $y''' = f(x); y'' = f(y, x'); y' = f(y, y')$; б) $y''' = f(x); y'' = f(x, y'); y' = f(y, y')$;
в) $y''' = f(y, y'); y'' = f(x, y'); y' = f(x, x')$; г) $y''' = f(x, y'); y'' = f(x); y' = f(y)$.
- Розв'язком рівняння $y''' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$ є:
а) $C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 4e^{3x}$; б) $C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 4e^{3x}$; в) $C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 8e^{3x}$; г) $C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 4e^{3x}$.

4. Якщо відомий один із частинних розв'язків лінійного рівняння

$$y'' + \frac{x \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y' + \frac{\operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y = 0; y_1(x) = \sin x, \text{ то його розв'язком є:}$$

а) $y = C_1 \sin x + C_2 x$; б) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$; в) $y = C_1 \cos x + C_2 x$; г) $y = C_1 x + C_2 \sin x$.

5. Якщо відомий один із частинних розв'язків лінійного рівняння

$$xy'' + 2y' + x = 0; y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ то його розв'язком є:}$$

а) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$; б) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$;
в) $y = C_1 \frac{\sin 2x}{x} + C_2 \frac{\cos 2x}{x}$; г) $y = C_1 \frac{\sin^2 x}{x} + C_2 \frac{\cos^2 x}{x}$.

Тема 22. Диференціальні рівняння другого порядку

Практичне заняття №27

План

1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - y' = e^x$.

☺ Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо: $y'' - y' = 0$, $\lambda^2 - \lambda = 0$, $\lambda(\lambda - 1) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^x.$$

Права частина вихідного диференціального рівняння є квазімногочленом з параметрами $n = 0, \alpha = 1, \beta = 0$. Комплексне число $z = \alpha + i\beta = 1$ і співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння $z = \lambda_2$. Тому, загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює: $\Phi(x) + \Psi(x)$, де $\Psi(x)$ – частинний розв'язок вихідного рівняння.

$$\Psi(x) = A e^x \cdot x \quad \Psi'(x) = A(e^x \cdot x + e^x) = A \cdot e^x (x + 1)$$

$$\Psi''(x) = A(e^x (x + 1) + e^x) = A \cdot e^x (x + 2)$$

Підставивши $\Psi'(x)$ і $\Psi''(x)$ замість y' і y'' в дане диференціальне рівняння, одержимо:

$$A \cdot e^x (x + 2) - A \cdot e^x (x + 1) = e^x$$

$$A \cdot e^x (x + 2 - x - 1) = e^x$$

$$A \cdot e^x = e^x \Rightarrow A = 1$$

Отже, $\Psi(x) = x \cdot e^x$. Тоді $y = C_1 + C_2 e^x + x \cdot e^x$ - шуканий загальний розв'язок. ☺☺

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 4y = x + 1$.

☺Аналогічно до прикладу 1 знаходимо:

$$y'' + 4y = 0, \quad \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\Phi(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина неоднорідного рівняння є квазімногочленом з параметрами $n = 1, \alpha = 0, \beta = 0$. Комплексне число $z = \alpha + i\beta = 0$ і не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок $\Psi(x)$ неоднорідного рівняння має вигляд:

$$\Psi(x) = Ax + B, \quad \Psi'(x) = A, \quad \Psi''(x) = 0.$$

Після підстановки $\Psi(x)$ і $\Psi''(x)$ замість y' і y'' в вихідне диференціальне рівняння знайдемо А і В:

$$4(Ax + B) = x + 1.$$

Звідси випливає, що $4A = 1, 4B = 1; A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}$. Таким чином:

$$\Psi(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд:

$$y = \Phi(x) + \Psi(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}(x + 1) \text{☺☺}$$

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' - 9y = e^x$, який задовольняє початковим умовам: $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

☺Спочатку розв'яжемо однорідне диференціальне рівняння, яке відповідає даному:

$$y'' - 9y = 0, \quad \lambda^2 - 9 = 0, \quad \lambda^2 = 9, \quad \lambda_{1,2} = \pm 3.$$

$\Phi(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Права частина e^x - квазімногочлен з параметрами: $n = 0, \alpha = 1, \beta = 0$. $z = \alpha + i\beta = 1$ - не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд:

$$\Psi(x) = A \cdot e^x, \quad \Psi'(x) = A \cdot e^x, \quad \Psi''(x) = A \cdot e^x.$$

Після підстановки $\Psi(x)$ і $\Psi''(x)$ замість y' і y'' в неоднорідне диференціальне рівняння знайдемо А:

$$A \cdot e^x - 9A \cdot e^x = e^x, \quad -8A = 1, \quad A = -\frac{1}{8}.$$

Отже, $\Psi(x) = -\frac{1}{8}e^x$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{8}e^x$$

Для визначення довільних констант C_1 і C_2 обчислимо y' :

$$y' = C_1 e^{3x} \cdot 3 + C_2 e^{-3x} \cdot (-3) - \frac{1}{8} e^x,$$

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{8},$$

$$y'(0) = 3C_1 - 3C_2 - \frac{1}{8}.$$

Згідно з початковими умовами: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Тому,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{8} = 1; \\ 3C_1 - 3C_2 - \frac{1}{8} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{9}{8}; \\ C_1 - C_2 = \frac{1}{24}; \end{cases}$$

$$2C_1 = \frac{9}{8} + \frac{1}{24} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6};$$

$$C_1 = \frac{7}{12};$$

$$C_2 = \frac{9}{8} - C_1 = \frac{9}{8} - \frac{7}{12} = \frac{27-14}{24} = \frac{13}{24}.$$

Отже, розв'язком диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам є функція: $Y_{\pm} = \frac{7}{12} e^{3x} + \frac{13}{24} e^{-3x} - \frac{1}{8} e^x$. ☺☺

Завдання для виконання

В завданнях α, β, γ знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, у завданні θ знайти частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам:

$$1. \begin{array}{lll} \alpha) y'' - 3y' + 2y = x & \beta) y'' + 4y' = e^{-4x} & \gamma) y'' + 4y = x \\ \theta) y'' - 2y' = x & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \end{array}$$

$$2. \begin{array}{lll} \alpha) y'' + 3y' + 2y = e^x & \beta) y'' - 2y' = e^{2x} & \gamma) y'' + y = x + 3 \\ \theta) y'' - y = e^x & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \end{array}$$

$$3. \begin{array}{lll} \alpha) y'' - 5y' + 6y = e^{-2x} & \beta) y'' + y' = x & \gamma) y'' + 9y = 1 - x \\ \theta) y'' - 16y = e^{2x} & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \end{array}$$

$$4. \begin{array}{lll} \alpha) y'' + 5y' + 6y = x^2 + 1 & \beta) y'' + 5y' = x & \gamma) y'' + 16y = x^2 \\ \theta) y'' - 36y = x^2 + x + 1 & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \end{array}$$

$$5. \begin{array}{lll} \alpha) y'' - 7y' + 12y = e^{-x} & \beta) y'' - 5y' = \cos x & \gamma) y'' + y' = e^x \\ \theta) y'' - 4y = e^{4x} & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \end{array}$$

$$6. \begin{array}{lll} \alpha) y'' + 7y' + 10y = x & \beta) y'' + 2y' = \sin x & \gamma) y'' + y' = 1 \\ \theta) y'' - 25y = x^2 & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \end{array}$$

$$7. \begin{array}{lll} \alpha) y'' + 4y' + 4y = x^2 & \beta) y'' + 3y' = x & \gamma) y'' + y' + y = 1 \\ \theta) y'' + 4y = x & y(0) = 1 & y'(0) = 0 \end{array}$$

8. $\alpha) y'' + 2y' + y = e^{-x}$ $\beta) y'' + 2y' = e^{-2x}$ $\gamma) y'' + 2y' + 2y = x$
 $\theta) y'' + 9y = 2x + 1$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
9. $\alpha) y'' + 8y' + 15y = \cos x$ $\beta) y'' - y' = e^x$ $\gamma) y'' + 9y = 1$
 $\theta) y'' + 25y = e^{-3x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
10. $\alpha) y'' + 8y' + 12y = x + 1$ $\beta) y'' + 4y' = e^{-x}$ $\gamma) y'' + y' = 2x - 1$
 $\theta) y'' + 25y = \sin 2x$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$
11. $\alpha) y'' - 8y' + 7y = e^{-3x}$ $\beta) y'' - 4y' = e^{4x}$ $\gamma) y'' + 4y = x + 3$
 $\theta) y'' - 36y = e^{5x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
12. $\alpha) y'' + 8y' + 7y = x^2$ $\beta) y'' + 3y' = e^{-3x}$ $\gamma) y'' + 16y = x^2$
 $\theta) y'' + 36y = \cos 3x$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
13. $\alpha) y'' + 8y' + 16y = e^{2x}$ $\beta) y'' + 3y' = x$ $\gamma) y'' + 16y = e^{-x}$
 $\theta) y'' + 36y = e^{6x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
14. $\alpha) y'' - 8y' + 16y = x + 1$ $\beta) y'' + 3y' = \cos x$ $\gamma) y'' + 16y = e^{3x}$
 $\theta) y'' + 49y = e^{-7x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
15. $\alpha) y'' + 6y' + 5y = x^2$ $\beta) y'' + 2y' = e^{-2x}$ $\gamma) y'' + 49y = x$
 $\theta) y'' - 49y = e^{7x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
16. $\alpha) y'' + 6y' + 8y = e^x$ $\beta) y'' - 2y' = e^{3x}$ $\gamma) y'' + 49y = x^2$
 $\theta) y'' - 64y = x^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
17. $\alpha) y'' + 6y' + 9y = x$ $\beta) y'' - y' = x^2 + 1$ $\gamma) y'' + 49y = x + 1$
 $\theta) y'' - 64y = e^{-8x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
18. $\alpha) y'' - 6y' + 5y = e^{3x}$ $\beta) y'' - 5y' = e^{5x}$ $\gamma) y'' + 49y = e^x$
 $\theta) y'' + 64y = e^{8x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
19. $\alpha) y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ $\beta) y'' - 6y' = x$ $\gamma) y'' + 49y = xe^x$
 $\theta) y'' + 64y = \cos x$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
20. $\alpha) y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ $\beta) y'' + 6y' = 3x$ $\gamma) y'' + 49y = \sin 7x$
 $\theta) y'' - 64y = e^{2x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
21. $\alpha) y'' + 7y' + 12y = e^{-4x}$ $\beta) y'' + 7y' = e^{-7x}$ $\gamma) y'' + 64y = e^{-5x}$
 $\theta) y'' + 5y = e^{-5x}$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
22. $\alpha) y'' + 7y' + 10y = x$ $\beta) y'' - 7y' = x^2$ $\gamma) y'' + 64y = e^x$
 $\theta) y'' + 7y = e^{-7x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
23. $\alpha) y'' + 7y' + 6y = e^{-x}$ $\beta) y'' - 9y' = e^{9x}$ $\gamma) y'' + 64y = \cos 8x$
 $\theta) y'' - 10y = e^{10x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
24. $\alpha) y'' - 7y' + 12y = e^x$ $\beta) y'' + 10y' = e^{9x}$ $\gamma) y'' + 81y = \cos 3x$
 $\theta) y'' + 6y = e^{-6x}$ $y(0) = y'(0) = 0$

25. $\alpha) y'' - 7y' + 10y = e^{3x}$ $\beta) y'' + 12y' = x^2 + x$ $\gamma) y'' + 81y = x^2 + 1$
 $\theta) y'' - 12y = e^{6x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
26. $\alpha) y'' - 7y' + 6y = e^x$ $\beta) y'' - 12y' = e^{2x}$ $\gamma) y'' + 81y = x - 1$
 $\theta) y'' - 100y = x$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
27. $\alpha) y'' + 9y' + 20y = e^{-3x}$ $\beta) y'' + 15y' = e^{-5x}$ $\gamma) y'' + 81y = \cos 9x$
 $\theta) y'' - 100y = x^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
28. $\alpha) y'' - 9y' + 18y = e^{6x}$ $\beta) y'' - 15y' = e^{15x}$ $\gamma) y'' + 81y = \sin 9x$
 $\theta) y'' - 100y = e^{100x}$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
29. $\alpha) y'' - 9y' + 14y = e^{2x}$ $\beta) y'' + 16y' = e^{-16x}$ $\gamma) y'' + 81y = e^{9x}$
 $\theta) y'' - 9y' = x^2 + x + 1$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
30. $\alpha) y'' - 9y' + 8y = e^{2x}$ $\beta) y'' - 10y' = e^{5x}$ $\gamma) y'' + 81y = e^{-9x}$
 $\theta) y'' - 9y' = e^{9x}$ $y(0) = y'(0) = 0$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- В якому з рівнянь корені дорівнюють $k_1 = 2 - 3i; k_2 = 2 + 3i$?
 а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' + 3y' + 2y = 0$; в) $y'' - 4y + 13y = 0$; г) $y'' - 2y' - 3y = 0$.
- В якому з рівнянь корені в сумі дають 2?
 а) $y'' - 2y' - 3y = 0$; б) $y'' + 3y' + 2y = 0$; в) $y'' + y' - y = 0$; г) $y'' + 5y' = 0$.
- Проінтегрувавши рівняння $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 5x$, знаючи, що $y_1 = x^2$, вказати розв'язок відповідного однорідного рівняння:
 а) $y = x^3(c_1 \ln |x| - c_2) + 5x$; б) $y = x^3(c_1 \ln |x| - c_2) + 10x$;
 в) $y = x^2(c_1 \ln |x| + c_2) + 5x$; г) $y = x^3(c_1 \ln |x| + c_2) + 5x$.
- Якщо відомий один із частинних розв'язків лінійного рівняння $y'' + (2\lg x - \operatorname{ctg} x)y' + 2y\lg^2 x = 0$; $y_1(x) = \cos^2 x$, то його розв'язком є:
 а) $y = C_1 \cos x + C_2 \cos^2 x$; б) $y = C_1 \sin x + C_2 x$;
 в) $y = C_1 \cos^2 x + C_2 \cos x$; г) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos^2 x$.
- Якщо відомий один із частинних розв'язків лінійного рівняння $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$; $y_1(x) = \frac{1}{x}$, то його розв'язком є:
 а) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$; б) $y = C_1 \cos x + C_2 \cos^2 x$; в) $y = C_1 x + \frac{2C_2}{x}$; г) $y = C_1 x + C_2 x$.

Практичне заняття №28

План

1. Застосування диференціальних рівнянь другого порядку у задачах економіки.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Нехай попит і пропозиція на товар визначається співвідношеннями $q = p'' - 2p' - p + 12$, $S = 2p'' + p' + 2p + 4$, де p - ціна товару, p' - тенденція формування ціни, p'' - темп зміни ціни. В початковий момент часу $p(0) = 3$; $q(0) = 10$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни товару від часу.

☺З умови, що попит повинен відповідати пропозиції маємо: $q = S$.

Отже, $p'' - 2p' - p + 12 = 2p'' + p' + 2p + 4$, або

$p'' + 3p' + 3p = 8$ - лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Відповідне однорідне рівняння $p'' + 3p' + 3p = 0$.

Складено характеристичне рівняння $k^2 + 3k + 3 = 0$;

$$K_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{3,0}(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\bar{P} = A; \bar{P}' = \bar{P}'' = 0; 3P = 8; A = \frac{8}{3}.$$

Загальний розв'язок такий:

$$P(f) = e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{8}{3}.$$

З початкових умов $P(0) = 3$; $C_1 + \frac{8}{3} = 3$; $C_1 = -\frac{1}{3}$.

Тоді:

$$p(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{8}{3}.$$

$$p'(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + e^{-\frac{3}{2}t} \left(C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) =$$

$$= e^{-\frac{3}{2}t} \left[\left(-\frac{3}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right].$$

$$p'(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2.$$

$$p''(f) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{2}C_2 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right] +$$

$$+ e^{-\frac{3}{2}t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right].$$

$$p''(0) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}C_2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}C_2 + \frac{1}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що $q = 2p'' + p' + 2p + 4$ та $q(0) = 10$, отримаємо

$$10 = 2 \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + 6 + 4;$$

$$-3\sqrt{3}C_2 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0;$$

$$\frac{-6\sqrt{3}C_2 + \sqrt{3}C_2}{2} = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{-1}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{15}.$$

Отже, залежність ціни товару від часу виражається формулою

$$P(f) = \frac{8}{3} - e^{-\frac{3}{2}t} \left(\frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{15} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

1. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями $Q(P) = 2P'' - P' - P + 15$, $Q(P) = 3P'' + P' + P + 5$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0) = 6$, $Q(0) = S(0) = 10$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

2. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P) = P'' - 4P' - P + 17$, $S(P) = 2P'' + P' + 3P + 5$, $P(0) = 3$, $6(0) = 11$, $Q(t) = S(t)$.

3. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P) = P'' - 4P' - 2P + 30$, $S(P) = 2P'' + 2P' + 6P - 18$, $P(0) = 6$, $Q(0) = 14$, $Q(t) = S(t)$.

4. Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t) = 3P'' - P' - 2P + 18$, $S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3$. Знайти залежність ціни від часу.

5. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями $Q(P) = P'' - P' - 3P + 1$, $Q(P) = P'' + 2P' + P + 4$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0) = 4$, $Q(0) = S(0) = 9$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

6. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P) = P'' + P' - P + 7$, $S(P) = 2P'' + P' + P - 5$, $P(0) = 2$, $Q(0) = 1$, $Q(t) = S(t)$.

7. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=2P''+P'-2P+3$, $S(P)=8P-2P'+P-8$, $P(0)=5$, $Q(0)=1$, $Q(t)=S(t)$.
8. Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=P''+2P'-2P+8$, $S(t)=P''-8P'+3P+2$. Знайти залежність ціни від часу.
9. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями $Q(P)=2P''-4P'-P+5$, $Q(P)=P''+P'+2P+5$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0)=5$, $Q(0)=S(0)=2$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.
10. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=6P''-P'-5P+1$, $S(P)=P''+6P'+P+5$, $P(0)=3$, $Q(0)=11$, $Q(t)=S(t)$.
11. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=P''+5P'-2P+10$, $S(P)=P''+12P'-6P-1$, $P(0)=56$, $Q(0)=4$, $Q(t)=S(t)$.
12. Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=3P''-4P'-P+5$, $S(t)=P''+5P'+3P+1$. Знайти залежність ціни від часу.
13. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями
14. $Q(P)=2P''-P'-6P+5$, $Q(P)=P''-6P'+P+4$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0)=3$, $Q(0)=S(0)=6$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.
15. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=5P''-4P'-3P+7$, $S(P)=7P''-P'+3P+5$, $P(0)=3$, $Q(0)=2$, $Q(t)=S(t)$.
16. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=2P''-4P'-2P+3$, $S(P)=P''-2P'+6P-8$, $P(0)=6$, $Q(0)=7$, $Q(t)=S(t)$.
17. Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=3P''-P'+P+1$, $S(t)=P''-6P'+3P+2$. Знайти залежність ціни від часу.
18. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями $Q(P)=2P''-P'-P+2$, $Q(P)=3P''+P'+4P+15$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0)=7$, $Q(0)=S(0)=10$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.
19. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=5P''-4P'-7P+1$, $S(P)=2P''-6P'+3P+4$, $P(0)=2$, $Q(0)=1$, $Q(t)=S(t)$.
20. Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=P''+4P'+2P+3$, $S(P)=P''+2P'-6P-1$, $P(0)=6$, $Q(0)=8$, $Q(t)=S(t)$.
21. Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким

- чином: $Q(t)=3P''-4P'-2P+1$, $S(t)=5P''+P'+3P+5$. Знайти залежність ціни від часу.
- 22.** Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=P''-4P'+2P+8$, $S(P)=4P''-P'+P-23$, $P(0)=9$, $Q(0)=2$, $Q(t)=S(t)$.
- 23.** Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=3P''-P'+2P+7$, $S(t)=8P''-6P'+P+5$. Знайти залежність ціни від часу.
- 24.** Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями $Q(P)=P''-2P'-6P+2$, $Q(P)=6P''+P'+4P+5$, де P - ціна на товар; P' - тенденція формування ціни; P'' - темп зміни ціни. Відомо, що у початковий момент часу $P(0)=8$, $Q(0)=S(0)=1$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.
- 25.** Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=9P''-4P'-P+21$, $S(P)=P''-6P'+P+5$, $P(0)=5$, $Q(0)=9$, $Q(t)=S(t)$.
- 26.** Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=3P''+4P'+2P+3$, $S(P)=9P''+2P'-6P-1$, $P(0)=6$, $Q(0)=7$, $Q(t)=S(t)$.
- 27.** Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=P''-9P'-2P+10$, $S(t)=5P''+P'-3P+5$. Знайти залежність ціни від часу.
- 28.** Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=P''+4P'-8P+7$, $S(P)=5P''-P'+P+3$, $P(0)=1$, $Q(0)=2$, $Q(t)=S(t)$.
- 29.** Знайти залежність ціни і попиту від часу, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями: $Q(P)=3P''-4P'+2P-3$, $S(P)=P''-2P'+6P-1$, $P(0)=1$, $Q(0)=8$, $Q(t)=S(t)$.
- 30.** Нехай функції попиту $Q(t)$ і пропозиції $S(t)$ залежать від ціни $P(t)$ таким чином: $Q(t)=5P''-9P'-8P+1$, $S(t)=P''+6P'-3P+3$. Знайти залежність ціни від часу.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

- Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду:
 - $F(x, y, y', y'')=0$;
 - $F(x, y'', y', y'')=0$;
 - $F(x', y, y', y'')=0$;
 - $F(x'', y, y', y'')=0$.
- Якщо розв'язати рівняння $F(x, y, y', y'')=0$ відносно y'' , то одержимо:
 - $y''=f(x, y, y')$;
 - $y''=f(x', y, y')$;
 - $y''=f(x, y, y')$;
 - $y''=f(x'', y, y')$.
- Загальним розв'язком рівняння $y''=f(x, y, y')$ є функція:
 - $y=f(x, y)$;
 - $y=\varphi(x, y, c)$;
 - $y=\varphi(x, c_1, c_2)$;
 - $y=f(x, y, y')$.
- Який вигляд мають початкові умови, за допомогою яких із загального розв'язку рівняння 2-го порядку одержується частинний розв'язок:
 - $y|_{x=x_0}=y_0$; $y'|_{x=x_0}=y'_0$;
 - $y|_{x=x_0}=y_0$; $y'|_{x=x_0}=y'_0$;
 - $y'|_{x=x_0}=y'_0$; $y''|_{x=x_0}=y''_0$;
 - $y|_{x=x_0}=y_0$; $y'|_{x=x_0}=y'_0$.
- Диференціальне рівняння n -го порядку має вигляд:
 - $f(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)})=0$;
 - $f(x; y; y_2; y_3; \dots; y_n)=0$;
 - $f(x; x_1; x_2; x_3; \dots; x^{(n)})=0$;
 - $f(x; y; y'; y''; \dots; y^{(x)})=0$.

Тема 23. Числові ряди

Практичне заняття №29

План

1. Числові ряди. Сума ряду. Ряди з додатними членами. Гармонічний ряд. Умови збіжності додатного ряду.
2. Теореми порівняння рядів з додатними членами. Ознаки збіжності рядів з додатними членами: Даламбера, Коші.
3. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Ознака Лейбніца.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Дослідити на збіжність числові ряди.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+1000n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

а) ☺ Випишемо a_n – загальний член числового ряду: $a_n = \frac{n}{1+1000n}$.

Знайдемо границю загального члена a_n при $n \rightarrow \infty$, матимемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+1000n} = \frac{1}{1000} \neq 0.$$

Ряд розбіжний, тому що не виконана необхідна умова збіжності:
 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \right)$. ☹☹

б) ☺ Аналогічно знаходимо границю загального члена ряду $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = \frac{1}{\infty} = 0$, але це не гарантує збіжності ряду. Для подальшого дослідження ряду на збіжність скористаємось інтегральною ознакою. Для цього дослідимо на збіжність інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx, \text{ де } f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln 2},$$

оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, як границя нескінченно малої функції.

Інтеграл дорівнює певному числу і тому він збіжний за означенням. Тоді за інтегральною ознакою ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ також збіжний. ☺☺

в) ☺ Скористаємось ознакою Даламбера. Запишемо $a_n = \frac{2^n}{n!}$ і $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Знайдемо границю співвідношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ є збіжним. ☺☺

г) ☺Скористаємось теоремою порівняння додатних рядів. Беремо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Обчислимо: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1$ (як перша визначна

границя). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ і

$\alpha = 3/2 > 1$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збіжний. Тоді, за теоремою про порівняння рядів

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ також збіжний. ☺☺

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

☺1) Дослідимо на абсолютну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Розглянемо загальний

член цього ряду $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, тоді $|a_n| = \frac{1}{n(n+1)}$.

Складемо додатній числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Порівняємо цей ряд з

узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є збіжним ($\alpha = 2 > 1$).

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

Отже, за першою ознакою порівняння рядів ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ є збіжним. Тоді

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ – абсолютно збіжний згідно з означенням абсолютної збіжності ряду. ☺☺

2) ☺ Дослідимо на абсолютну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Складемо

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ та $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Розглянемо ряд абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Цей ряд є розбіжним як узагальнений гармонічний ряд з $\alpha = 1/2 < 1$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ не є абсолютно збіжним. Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ на умовну збіжність:

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Маємо: $|a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \geq 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Отже, за теоремою Лейбніца ряд є збіжним, але ця збіжність не абсолютна, а умовна. ☺☺

Завдання для виконання

Завдання 1. Дослідити на збіжність ряди з додатніми членами:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+1000n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3+n+n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^{3n-1}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(5n+1)^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{50}}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{2n+7}\right)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+3}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{9n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(2n+1)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{1+100n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n+1} \right)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)!}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 3^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^2 \frac{1}{n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+6n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n \cdot n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{100n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2+2)}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} \ln \left(1 + \frac{2}{n^4} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{50n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(n+3)}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{3n^2+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{6n^3+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{3n^3} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{19n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^5+1}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{2+3n^2} \right)^n$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+100n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^5+4}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \operatorname{arctg} n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{1+n} \right)^n$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{5n^2+1}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{10^n}{(n-1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}) \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{1+3n} \right)^n$

$$\begin{aligned}
22. & \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}) \sin \frac{3}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{3+4n} \right)^n \\
23. & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{6^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n)^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+5n}{2+8n} \right)^n \\
24. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{2+n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
25. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4+n^3}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln \left(\frac{1}{n^3} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+8}{4n+13} \right)^n \\
26. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n+n^3}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot e^{-n^4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{8n+1} \right)^n \\
27. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{1+n^2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{10n+4} \right)^n \\
28. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n+5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \sin \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{11n}{10n+1} \right)^n \\
29. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{(n-1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10n}{11n+1} \right)^n \\
30. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{13n+4} \right)^n
\end{aligned}$$

Завдання 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

$$\begin{aligned}
1. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} & 2. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} & 3. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & 4. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \\
5. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} & 6. & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} & 7. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(1+n)} & 8. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^3+4} \\
9. & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{n} & 10. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(n+4)} & 11. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(n)} & 12. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{n+1}} \\
13. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n^2+1} & 14. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} & 15. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} & 16. & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin^2 \frac{1}{n} \\
17. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{\sqrt{3n^3+1}} & 18. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n^2+1}} & 19. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 \sqrt{n+1}} & 20. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{100n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(1+\sqrt{n})} \quad 22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \quad 23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n(n+1)} \quad 24. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n} \\
& 25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n} \quad 26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 \sqrt{1+n}} \quad 27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \quad 28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n e^n} \\
& 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n} \quad 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + n + 4} .
\end{aligned}$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Використовуючи ознаки Даламбера, Коші та інтегральну ознаку Коші і дослідивши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ на збіжність, отримаємо:

а) розбіжний; б) умовно збіжний; в) абсолютно збіжний; г) збіжний.

2. Дослідивши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}$ на збіжність, використовуючи ознаки

Даламбера, Коші та інтегральну ознаку Коші, отримаємо:

а) умовно розбіжний; б) збіжний; в) розбіжний; г) умовно збіжний.

3. При дослідженні на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3 \cdot (-1)^{n+1}}{2^n}$, використовуючи ознаку порівняння, отримаємо:

а) збіжний; б) абсолютно розбіжний; в) умовно розбіжний; г) розбіжний.

4. Чи збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$ і чом дорівнює його сума:

а) збіжний; $S=\pi$; б) збіжний; $S=4$; в) збіжний; $S=4\pi$; г) збіжний; $S=\frac{\pi}{4}$.

5. Використовуючи ознаку порівняння та дослідивши на збіжність ряд $\frac{10}{3} + \frac{10}{1+2^2} + \frac{10}{1+2^2} + \dots$, отримаємо:

а) збіжний умовний; б) абсолютно розбіжний; в) збіжний; г) розбіжний.

Тема 24. Степеневі ряди

Практичне заняття №30

План

1. Теорема Абеля. Знаходження проміжку збіжності степеневих рядів. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.
2. Розкладання елементарних функцій у ряди Тейлора та Маклорена. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень елементарних функцій.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Знайти інтервал збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n}$ та

дослідити його збіжність на кінцях цього інтервалу.

☺Випишемо загальний член ряду $u_n(x)$:

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n}.$$

Для обчислення інтервалу збіжності скористаємось ознакою Даламбера.

Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$. Оскільки $|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n}$, $|u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n}{(n+1)|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

За ознакою Даламбера при $|x| < 1$ ряд збіжний. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу $(-1, 1)$. Підставимо замість x число -1 . Одержимо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{розбіжний як гармонічний ряд.}$$

Підставимо замість x число 1 . Одержимо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, для якого

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad |a_n| = \frac{1}{n}; \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}. \text{ Отже, } |a_{n+1}| < |a_n|, \quad \forall n \geq 1 \text{ і}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. За теоремою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – збіжний. Отже, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n}$ розбіжний при $x = -1$ і збіжний при $x = 1$. ☺☺

Приклад 2. Користуючись розкладом в ряд Маклорена підінтегральної функції, обчислити наближено з точністю до 0,001 інтеграл: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

☺Оскільки $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$,

тоді
$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \dots$$

Якщо в останню рівність підставити замість x величину x^2 , то одержимо розклад в ряд Маклорена шуканої функції.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!} + \dots$$

Підставимо в інтеграл замість e^{-x^2} її розклад в ряд Маклорена, матимемо:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{1/3} + \frac{x^5}{2/5} - \frac{x^7}{3/7} + \frac{x^9}{4/9} - \frac{x^{11}}{5/11} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{1/3} + \frac{1}{2/5} - \frac{1}{3/7} + \frac{1}{4/9} - \frac{1}{5/11} + \dots\end{aligned}$$

Отриманий числовий ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца: $|a_{n+1}| < |a_n|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ і знаки членів ряду чергуються. Тому, згідно з теоремою Лейбніца, отриманий ряд є збіжним. Для наближеного обчислення з точністю до 0,001 суми ряду знайдемо мінімальний за номером член ряду, який за модулем менший від 0,001 і, починаючи з цього члена ряду, відкинемо всі інші члени, які за ним слідуєть.

$$\left| \frac{1}{5/11} \right| = \frac{1}{5/11} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{1}{120 \cdot 11} < 0,001.$$

Тоді для наближеного обчислення суми ряду візьмемо суму лише перших п'яти його членів

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{1/3} + \frac{1}{2/5} - \frac{1}{3/7} + \frac{1}{4/9} - \frac{1}{5/11} + \dots &\approx 1 - \frac{1}{1/3} + \frac{1}{2/5} - \frac{1}{3/7} + \frac{1}{4/9} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,6667 + 0,1 - 0,0238 + \text{☺☺} \\ &+ 0,0046 \approx 0,794\end{aligned}$$

Завдання для виконання

Завдання 1. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{2n-2}}{(3n-2)^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n (n+2)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{2^n \cdot 5^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n (2n-1)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n \cdot 2n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n-2)3^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n (2n-1)}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{3n-2^n}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n (2n+1)}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 \cdot 5^n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n(n^2+1)}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{n^2 + 1}$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^{n-1}}{n+1}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$	20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{\sqrt{n+2}}$	21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n^2 + 4}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{4^{n+1}}$	23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n(2n-1)}$	24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(n+3) \cdot 5^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(1+3n)}$	26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n-1}}{\sqrt{n^3 + 1}}$	27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n+1}}$	29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+\sqrt{n})}$	30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{4+n}$

Завдання 2. Використовуючи ряди Маклорена, обчислити наближено з точністю до 0,001 інтеграли:

1. $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$	2. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$	3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$
4. $\int_0^1 \sin x^2 dx$	5. $\int_0^1 \cos x^2 dx$	6. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{1+x^4}$
7. $\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2} dx$	8. $\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$	9. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$
10. $\int_{0,1}^{0,5} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx$	11. $\int_0^{1/5} \frac{dx}{1+x^6}$	12. $\int_0^1 e^{-x^4} dx$
13. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} dx$	14. $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx$	15. $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$
16. $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x} dx$	17. $\int_0^1 x \cdot e^{-x^3} dx$	18. $\int_0^1 x^3(1 - \cos x) dx$
19. $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{4x} dx$	20. $\int_0^1 x^2 \cdot \cos x^2 dx$	21. $\int_0^1 x^2 \cdot \sin x^2 dx$
22. $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x/2} dx$	23. $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx$	24. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{16+x^4}$$

$$26. \int_0^1 \frac{(1-e^{-x^2})dx}{2x^2}$$

$$27. \int_0^1 x \cdot e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$28. \int_{0,1}^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$29. \int_0^1 x^4 \cdot e^{-x} dx$$

$$30. \int_0^1 \cos x^4 dx$$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Інтервалом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ є:

- а) $(-3; 0)$; б) $(-1; 3)$; в) $(-2; 3)$; г) $(-3; 3)$.

2. Інтервалом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ є:

- а) $(-1; 1)$; б) $(-2; 3)$; в) $(-2; 2)$; г) $(-1; 4)$.

3. Інтервалом збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$ є:

- а) $(-4; 1)$; б) $(-9; -7)$; в) $(-2; 1)$; г) $(-1; 7)$.

4. Інтервалом збіжності ряду $x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \dots$ є:

- а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $(-10; 10)$; г) $(0; 1)$.

5. Інтервалом збіжності ряду $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots$ є:

- а) $(3; 7)$; б) $(-2; 2)$; в) $(1; 3)$; г) $(-4; 1)$.

Тема 25. Основні поняття теорії ймовірностей

Практичне заняття №31

План

1. Операції над подіями. Елементи комбінаторики.
2. Класичне та геометричне означення ймовірності події.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер

Я, І, Р, Е, О, Т.

Яка ймовірність того, що картки, намання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я	?
---	---	---	---	---	---	---

☺ Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, $m=1$.
Позначивши розглядувану подію через B , дістанемо:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Її елементи навімання розставляють у рядок. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

A - розставлені в ряд числа утворюють зростаючу послідовність;

B - спадну послідовність;

C - цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 - на останньому;

D - цифри утворять парне п'ятицифрове число.

☺Простір елементарних подій для цього експерименту міститиме $n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ несумісних, рівноймовірних елементарних подій.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі A , дорівнює одиниці ($m_1=1$).

Кількість елементарних подій, що сприяють появі B , дорівнює одиниці ($m_2=1$).

Для випадкової події C : $m_3 = 3!$

Для випадкової події D : $m_4 = 4! \cdot 2 = 48$.

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{120}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{120}$;

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3!}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}; \quad P(D) = \frac{m_4}{n} = \frac{4! \cdot 2}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 3. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо

1	9	7	3	?
---	---	---	---	---

☺Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці ($m = 1$). Позначимо цю випадкову подію через B . Тоді

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 4. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студента не мають спільного дня народження?

☺Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів - 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω . Позначимо через B випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B , $m = A_{365}^{10}$.

$$\text{Остаточно маємо: } P(B) = \frac{m}{n} = \frac{A_{365}^{10}}{(365)^{10}} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 5. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в працездатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

☺Оскільки кожен верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах - працездатному або непрацездатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію - із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A , буде

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120 .$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}} . \text{☺☺}$$

Приклад 6. В шафі міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шафи беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A - усі чотири деталі виявляться стандартними;

B - усі чотири деталі виявляться бракованими;

D - із чотирьох деталей виявляться дві стандартними і дві бракованими.

☺Кількість усіх елементарних подій множини Ω

$$n = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 3 \cdot 6} = 210 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A :

$$m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{2! 4!} = 15 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі B :

$$m_2 = C_4^4 = \frac{4!}{4! 0!} = 1 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі D :

$$m_3 = C_6^2 C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90 .$$

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{630} = \frac{3}{112} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} ;$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210} ;$$

$$P(D) = \frac{m_3}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} . \text{☺☺}$$

Приклад 7. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта - стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

☺Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: $n=15$.

Нехай A - подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A , дорівнює дев'яти ($m = 9$). Тоді маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 8. По трубопроводу між пунктами A і B перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці довжиною 100 м.

☺Простір елементарних подій $\Omega = \{0 \leq l \leq 2 \text{ км}\}$, тоді $A = \{0 \leq l \leq 0,1 \text{ км}\}$ ($A \subset \Omega$).

Тому:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l_1}{l} = \frac{0,1}{2} = \frac{1}{20} \cdot \text{☺☺}$$

Приклад 9. У ящику міститься 13 однакових деталей, серед яких 5 є бракованими, а решта - стандартними. Навмання з ящика беруть чотири деталі. Яка ймовірність того, що всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

☺Множина Ω містить $n = C_{13}^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 715$ елементарних подій. Позначимо через A появу чотирьох стандартних деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі A : $m_1 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$. Позначимо через B появу чотирьох бракованих деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B , $m_2 = C_5^4 = \frac{5!}{4!1!} = 5$.

Тоді:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{C_8^4}{C_{13}^4} + \frac{C_5^4}{C_{13}^4} = \frac{70}{715} + \frac{5}{715} = \frac{75}{715} = \frac{15}{143} \cdot \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

1. У графіку руху на дільниці є 120 колій для вантажних потягів. На станцію з цієї дільниці прибувають 80 потягів для розбірки. Яка ймовірність прибуття потягу по одній колії (подія A)?

2. У філії банку працює 6 співробітників, які займають всі свої робочі місця. Скільки існує різних способів пересадити співробітників?

3. Лічильна комісія складається з голови, його заступника і ще трьох членів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою обов'язки?

4. До відділу магазину надійшло 15 виробів, серед яких 10 вищого гатунку. Для контролю навмання відібрали 3 вироби без повернення. Знайти ймовірність того, що всі виробити виявляться вищого гатунку.

5. Адміністративно-управлінський персонал підприємства складається з 7 осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників – директора, фінансового та креативного директорів?

6. Працівник безпеки фірми виявив 6 харчових пакетів з закінченим терміном придатності серед випадково відібраних 100 однакових харчових

пакетів. Знайти відносну частоту появи харчових пакетів з закінченим терміном придатності.

7. В дозвільному центрі працює 5 консультантів та 7 фахівців з надання адміністративних послуг. Скількома способами можна відібрати 2 консультанти та 3 фахівці, якщо всі вони вважаються рівноцінними?

8. Торговельна мережа одержала 50 телефонів, з яких 5 бракованих. Навмання для перевірки взяли 3. Яка ймовірність того, що серед взятих телефонів будуть один бракований та два стандартних?

9. Для проходження практики 30 студентам виділено 15 місць на першій фірмі, 8 місць – на другій та 7 місць – на третій фірмі. Визначити скількома способами можна розподілити студентів по фірмах так, щоб 3 певних студенти попали на одну фірму, вважаючи розподіл рівномірним.

10. В ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три ремонтники. Кожний з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що ремонтники вийдуть на різних поверхах.

11. Гральний кубик кидають один раз. Знайти ймовірність наступних подій: A – поява парного числа очок; B – поява не менше 5 очок; C – поява не більше 5 очок.

12. Гральний кубик кидають два рази. Знайти ймовірність того, що обидва рази з'явиться однакове число очок.

13. Кидають одночасно два гральних кубики. Знайти ймовірність наступних подій: A – сума очок, які випали рівна 8; B – добуток очок, які випали рівна 8; C – сума очок, які випали більша, ніж їх добуток.

14. Кидають дві монети. Яка з подій є більш імовірною: A – монети ляжуть однаковими сторонами; B – монети ляжуть різними сторонами.

15. В розіграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких наступним чином формуються дві групи по 9 команд в кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірності наступних подій: A – всі команди екстракласу попадуть в одну і ту ж групу; B – всі команди екстракласу попадуть в одну і з груп, а три – в іншу.

16. На дев'яти карточках написані цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Дві з них достають навмання на стіл в порядку появи, далі зачитується отримане число, наприклад, 07 (сім), 14 (чотирнадцять) і т.д.. Знайти ймовірність того, що число буде парним.

17. На п'яти карточках написані цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Дві з них, одна за другою, достають. Знайти ймовірність того, що число на другій карточці буде більшим, ніж на першій.

18. На п'яти карточках написані цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Дві з них, одна за другою, достають. Але перша карточка після діставання кладеться назад і змішується з іншими, а число, яке стоїть за нею записується. Знайти ймовірність того, що число на другій карточці буде більшим, ніж на першій.

19. В барабані револьвера 7 гнізд, із них в 5 закладені патрони, а 2 залишені порожніми. Барабан обертають, в результаті чого напроти ствола випадково виявляється одне з гнізд. Після чого натискається спусковий крючок; якщо чарунка була порожня, вистрілу не відбулось. Знайти ймовірність того, що повторивши такий дослід два рази підряд, ми обидва рази не вистрілимо.

20. В барабані револьвера 7 гнізд, із них в 5 закладені патрони, а 2 залишені порожніми. Барабан обертають, в результаті чого напроти ствола випадково виявляється одне з гнізд. Після чого натискається спусковий крючок; якщо чарунка була порожня, вистрілу не відбулось. Знайти ймовірність того, що повторивши такий дослід два рази підряд, ми обидва рази вистріл відбудеться.

21. З п'яти букв розрізної абетки складено слова «книга». Дитина, яка не вміє читати, розкидала ці букви і знову зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що вона знову отримала слово «книга».

22. З шести букв розрізної абетки складено слова «ананас». Дитина, яка не вміє читати, розкидала ці букви і знову зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що вона знову отримала слово «ананас».

23. Чотири кульки випадково розкидаються по чотирьох лунках; кожна кулька попадає в ту або іншу лунку з однаковою ймовірністю і незалежно від інших (перешкод до попадання в одну і ту ж лунку кульок немає). Знайти ймовірність того, що в одній із лунок виявиться три кульки, а іншій – одна, а в двох інших лунках кульок не буде.

24. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше випаде герб. Визначити ймовірності виграшу для кожного з гравців.

25. Ймовірність події в окремому досліді. Дорівнює 0,3. Досліди виконуються послідовно до настання події визначити ймовірність того, що прийдеться виконувати четвертий дослід.

26. Розрив електричного ланцюга може відбутися внаслідок виходу із ладу елемента A або елементів A_1 і A_2 , які виходять із ладу незалежно один від одного відповідно з ймовірностями 0,1, 0,2, 0,3. Знайти ймовірність розриву електричного ланцюга.

27. Яка ймовірність того, що два взяті навмання цілих числа не будуть мати: а) загального дільника 2; б) загального дільника 6.

28. Яка ймовірність того, що навмання вибране натуральне число: а) не ділиться на 2 і на 3; б) ділиться на 2 або на 3.

29. Яка ймовірність того, що в партії з 12 виробів не буде жодного дефектного, якщо ймовірність дефекту виробу дорівнює $1/9$?

30. Оптова партія виробів містить один відсоток браку. Яким мусить бути обсяг партії, щоб ймовірність наявності бракованих виробів у ній була б меншою 0,95?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Група туристів проходить на кордоні митний контроль. Із 30 туристів 6 не задекларували валюту, яку вони перевозять. Митна група навімання (для контролю) вибирає певну групу туристів. Знайти імовірність того, що вибраний навімання турист не задекларував валюту.
а) 0,3; б) 0,2; в) 0,1; г) -0,1.
2. Статистичний звіт підприємства може прийняти один із чотирьох експертів статуправління. Імовірність того, що звіт прийме перший експерт дорівнює 0,15, другий – 0,35, третій – 0,2. Знайти імовірність того, що звіт прийме четвертий експерт.
а) 0,5; б) 0,3; в) 0,0105; г) 0,35.
3. В адвокатській фірмі працює три адвокати. Особа звернулася до фірми з проханням захищати її на судовому засіданні. Імовірність того, що справу захищатиме перший адвокат 0,3, другий адвокат – 0,45. Знайти імовірність того, що справу захищатиме третій адвокат.
а) 0,25; б) 0,7; в) 0,55; г) 0,3.
4. Податкова адміністрація перевірила три навімання вибраних фірми та наявність у них порушень нормативних актів про сплату податків і результати перевірки відзначила знаком «+» - фірми, в яких є порушення, знаком «-» - в яких немає порушення. Опишіть подію A – більше ніж дві фірми мають порушення.
а) $A = \{+++\}$; б) $A = \{++-\}$; в) $A = \{---\}$; г) $A = \{+--,++-,+-+,-++\}$.
5. Розглянемо сім'ї, які мають по двоє дітей. Експеримент полягає в тому, що навімання вибирають сім'ю і фіксують стать дитини. Елементарний результат ХД означає, що старша дитина – хлопчик, молодша – дівчинка. Описати простір елементарних подій експерименту.
а) $\Omega = \{XX, ДД\}$; б) $\Omega = \{XD, DX\}$; в) $\Omega = \{XX, ДД, XD, DX\}$; г) $\Omega = \{XX, ДД\}$.

Тема 26. Основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них

Практичне заняття №32

План

1. Теореми додавання та суми ймовірностей несумісних подій. Теореми множення ймовірностей.
2. Формула повної ймовірності випадкової події за наявності n гіпотез. Формула Байєса.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Проводиться стрільба по деякій області D мішені, яка містить три зони, які не перетинаються між собою. Ймовірність попадання в зону І: $P(A_1) = \frac{5}{100}$, в зону ІІ: $P(A_2) = \frac{10}{100}$, в зону ІІІ: $P(A_3) = \frac{17}{100}$. Яка ймовірність попадання в область D ?

☺Подія A - попадання в область D . Отже, маємо:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100}. \text{☺☺}$$

Приклад 2. На фірму з трьома складами прибуває група товарів на один з них. Ймовірність призначення товарів для першого складу $p_1=0,4$, а для другого $p_2=0,35$. Визначити ймовірність p_3 того, що ці товари призначені для третього складу.

☺Розглянуті події єдиноможливі і несумісні. Тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,4 + 0,35 + p_3 = 1$, звідки

$$p_3 = 1 - 0,4 - 0,35 = 0,25. \text{☺☺}$$

Приклад 3. Пасажир може доїхати до своєї станції потягами двох призначень. Ймовірність наявності в касі квитків на потяг першого призначення $P(A)=0,5$, а на потяг другого призначення $P(B)=0,7$. Знайти ймовірність того, що пасажир купив квиток.

☺Подія A – наявність квитків на потяг одного призначення та подія B - наявність квитків на потяг іншого призначення є сумісні і тому ймовірність того, що хоча б одна з них відбудеться, за формулою додавання ймовірностей сумісних подій дорівнює:

$$P(A+B) = 0,5 + 0,7 - 0,5 \cdot 0,7 = 0,85. \text{☺☺}$$

Приклад 4. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

☺Нехай поява числа, кратного трьом - подія A , а поява герба - подія B . Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P(B) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \text{☺☺}$$

Приклад 5. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

☺Нехай $p_1 = 0,95$ - ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно $p_2 = 0,9$; $p_3 = 0,85$; $p_4 = 0,8$. Ймовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,95 = 0,05;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,9 = 0,1;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,85 = 0,15;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Тому

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 1 - 0,00015 = 0,99985. \text{☺☺}$$

Приклад 6. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого - 35% і від третього - 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий - 2% і третій - 8%. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

☺ Позначимо через A появу стандартної деталі, B_1 - деталь надійде від першого цеху, B_2 - від другого, B_3 - від третього. За умовою задачі:

$$P(B_1) = 0,45, \quad P(A / B_1) = 0,94;$$

$$P(B_2) = 0,35, \quad P(A / B_2) = 0,98;$$

$$P(B_3) = 0,2, \quad P(A / B_3) = 0,92.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + P(B_3)P(A / B_3) = \\ &= 0,45 \cdot 0,94 + 0,35 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,92 = 0,423 + 0,343 + 0,184 = 0,95. \quad \text{☺☺} \end{aligned}$$

Приклад 7. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% - із заводу №1, 25% - із заводу №2; 40% - із заводу №3 і 20% - із заводу №4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, встановлено, що в середньому брак становить для заводу №1 - 3%, заводу №2 - 5%, заводу №3 - 8% і заводу №4 - 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

☺ Позначимо через B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 - заводом № 2, B_3 - заводом № 3 і B_4 - заводом № 4. Ці гіпотези єдиноможливі і несумісні. Нехай A - випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$$P(B_1) = 0,15, \quad P(B_2) = 0,25, \quad P(B_3) = 0,4, \quad P(B_4) = 0,2, \quad P(A/B_1) = 0,03, \quad P(A/B_2) = 0,05, \quad P(A/B_3) = 0,08, \quad P(A/B_4) = 0,01.$$

За формулою Байєса переоцінюємо першу гіпотезу B_1 :

$$\begin{aligned} P(B_1/A) &= \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) + P(B_4)P(A/B_4)} = \\ &= \frac{0,15 \cdot 0,03}{0,15 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,08 + 0,2 \cdot 0,01} = \frac{0,0045}{0,051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}. \quad \text{☺☺} \end{aligned}$$

Завдання для виконання

1. В магазин надійшла партія взуття одного фасону і розміру, але різного кольору. Партія містить 40 пар чорного кольору, 26 – коричневого, 22 – червоного і 12 пар синього. Коробки із взуттям виявились невідсортовані за кольором. Яка ймовірність того, що навмання взята коробка виявиться із взуттям червоного або синього кольору?

2. У банку працює 10 співробітників, 8 з яких є консультантами. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних двох співробітників, хоча б один буде консультантом.

3. В компанії працює 10 менеджерів, серед яких двоє – родичі. Жеребкуванням вибирають трьох. Знайдіть ймовірність того, що серед вибраних фахівців буде принаймні один із родичів.

4. До мінімаркету з п'ятьма відділами прибував товар до одного з них. Ймовірність призначення товару для першого відділу $p_1=0,15$, для другого $p_2=0,25$, для третього $p_3=0,2$, а для четвертого $p_4=0,1$. Знайти ймовірність p_5 того, що цей товар призначений для п'ятого відділу.

5. У графіку руху потягів на дільниці є 120 колій для вантажних потягів. З цієї дільниці на станцію прибувають за розбіркою 80 потягів. Знайти ймовірність прибуття двох розбіркових потягів по двох сусідніх коліях.

6. Ймовірність виготовлення стандартного виробу даним станком дорівнює 0,9. Ймовірність появи виробу першого гатунку серед стандартних виробів становить 0,8. Визначити ймовірність виготовлення виробу першого гатунку даним станком.

7. В групі з 10 студентів, які прийшли на екзамен, 3 підготовлені відмінно, 4 – добре, 2 – посередньо і 1 – погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Студент, який підготовлений відмінно може відповісти на всі 20 питань, який підготовлений добре – на 16, посередньо – на 10, погано – на 5. Визваний на вивчення студент відповів на три довільно заданих питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений: а) відмінно; б) погано.

8. На трьох автоматизованих лініях виготовляють однакові деталі, причому 40% - на першій лінії, 30% - на другій та 30% - на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі для цих ліній становить відповідно 0,9, 0,95 та 0,95. Виготовлені деталі надходять на склад. Яка ймовірність того, що на вивчення взята деталь стандартна?

9. У лікарню поступають (в середньому) 40% хворих на пневмонію, 30% - на перитоніт та 30% хворих на ангіну. Ймовірність повного одужання від пневмонії – 0,8; від перитоніту – 0,7 та ангіни – 0,85. Виписано хворого, який повністю одужав. Яка ймовірність того, що він був хворий на перитоніт?

10. 30% приладів збирає фахівець високої кваліфікації і 70% середньої. Надійність роботи приладу, зібраного фахівцем високої кваліфікації 0,9, надійність приладу, зібраного фахівцем середньої кваліфікації 0,8. Взятий прилад виявився надійним. Визначити ймовірність того, що він зібраний фахівцем високої кваліфікації.

11. Є коробка з 9 новими тенісними м'ячами. Для гри беруть 3 м'яча; після гри їх кладуть назад. При виборі м'ячів, якими грали і якими не грали не розрізняють. Яка ймовірність того, що після трьох ігор в коробці не залишаться м'ячі, якими не грали?

12. Кидають дві монети. Розглядаються події: A – випадання герба на першій монеті; B - випадання герба на другій монеті. Знайти ймовірність події $C=A+B$.

13. Ведеться стрільба по літаку, вразливими агрегатами якого є два двигуни і кабіна пілота. Для того, щоб вивести із строю літак, достатньо вразити обидва двигуни разом або кабінку літака. За даних умов стрільби ймовірність поразки першого двигуна рівна p_1 , другого двигуна – p_2 , кабіни

пілота – p_3 . Агрегати літака уражаються незалежно один від одного. Знайти імовірність того, що літак буде уражений.

14. 32 букви українського алфавіту написані на карточках розрізної абетки. П'ять карточок дістають навмання одну за другою і складають на стіл в порядку появи. Знайти імовірність того, що отримають слово «сонце».

15. 32 букви українського алфавіту написані на карточках розрізної абетки. П'ять карточок дістають навмання одну за другою і складають на стіл в довільному порядку. Знайти імовірність того, що з п'яти карточок, які дістали можна скласти слово «сонце».

16. Дві кульки розкидають випадково і незалежно одну від одної по чотирьом чарункам, які розміщені одна від одної по прямій лінії. Кожна кулька з однаковою імовірністю $\frac{1}{4}$ попадає в кожен чарунку. Знайти імовірність того, що кульки попадуть в сусідні чарунки.

17. Відбувається стрільба по літаку запалювальними снарядами. Пальне на літаку зосереджене в чотирьох баках, розташованих у фюзеляжі один за одним. Площі баків однакові. Для того, щоб запалити літак, достатньо попасти двома снарядами або в один и то й же бак, або в сусідні баки. Відомо, що в область баків попало два снаряди. Знайти імовірність того, що літак загориться.

18. Прилад може працювати в двох режимах: а) нормальному і б) ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20%. Ймовірність виходу з ладу за час t в нормальному режимі рівна 0,1; в ненормальному – 0,7. Знайти повну імовірність p виходу приладу з ладу з час t .

19. У рибак є три улюблених місця для ловлі риби, які він відвідує з рівною імовірністю кожне. Якщо він закидає вудочку на першому місці, риба клює з імовірністю 0,1; на другому місці – з імовірністю 0,2; на третьому – з імовірністю 0,3. Відомо, що рибак виходячи на ловлю риби, три рази закинув вудочку і риба клюнула тільки один раз. Знайти імовірність того, що він ловив рибу на першому місці.

20. Пасажир може звернутися за отриманням білету в одну з трьох кас. Ймовірності звернення в кожен касу залежать від місця розташування і рівні відповідно 0,3, 0,4, 0,5. Імовірність того, що до моменту приходу пасажирів наявні білети в касі будуть розпродані, рівна для першої каси P_1 , для другої P_2 , для третьої P_3 . Пасажир направився за білетом в одну з кас і придбав білет. Знайти імовірність того, що це була перша каса.

21. Три гармати здійснюють стрільбу по трьом цілям. Кожна гармата вибирає ціль випадково і незалежно від інших. Ціль, яка обстріляна однією гарматою, уражається з імовірністю p . знайти імовірність того, з трьох цілей дві будуть уражені, а третя ні.

22. В автобусі їдуть 30 пасажирів. На наступній зупинці кожний з них виходить з імовірністю p ; крім того, в автобус з імовірністю p_0 не виходить ні один новий пасажир; з імовірністю $1-p_0$ – один новий пасажир. Знайти

імовірність того, що коли автобус знову тронеться в путь після наступної зупинки, в ньому буде як і раніше 30 пасажирів.

23. Прилади однієї назви виготовляються двома заводами; перший завод постачає $2/3$ всіх виробів, які поступають на виробництво; другий – $1/3$. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює p_1 ; другого – p_2 . Визначити повну надійність p приладу, який поступив на виробництво.

24. Є дві урни: в першій 5 білих кульок і 8 чорних; в другій 3 білих і 7 чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, одну кульку. Після цього з другої урни беруть одну кульку. Знайти імовірність того, що ця кулька буде білою.

25. На складальну дільницю надходять деталі з трьох підприємств, причому перше поставляє 50%, друге – 20% і третє – 30% всієї кількості. Імовірності браку для першого, другого та третього підприємств відповідно дорівнюють 0,05, 0,15 і 0,1. Яка ймовірність того, що чергова деталь, яка надійшла на дільницю, виявиться бракованою?

26. При вмиканні стартера автомобіль починає працювати з імовірністю 0,5. Яка імовірність того, що різниця між першим вибраним числом і другим буде не меншим m ($m > 0$)?

27. Відомо, що у половини торгових підприємств всі товари якісні, а у другої половини десята частина товару має дефекти. Навмання вибрана одиниця товару виявилася якісною. Знайти імовірність того, що наступна навмання вибрана одиниця товару у цьому ж торговому підприємстві виявиться якісною.

28. На окремих картках написані послідовні натуральні числа від 1 до 10. Із них наосліп послідовно без повернень виймаються дві картки. Яка імовірність того, що перше число більше за друге на 8?

29. Для участі в студентських відбіркових змаганнях виділено із першої групи – 4, із другої – 6, із третьої групи – 5 студентів. Імовірності того, що студент першої, другої і третьої групи попаде до збірної відповідно дорівнюють 0,9, 0,7 і 0,8. Навмання вибраний студент в результаті попав до збірної. До якої із груп найімовірніше всього належить цей студент?

30. Із повного набору пластинок доміно навмання беруться дві пластинки. Яка імовірність того, що другу пластинку можна приставити до першої?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Серед 10 пар взуття, які розміщені на полиці магазину – 6 пар 41 розміру. З полиці беруть двічі навмання по одній парі взуття, не повертаючи їх назад. Нехай подія A – перша пара взуття 41 розміру, B – друга пара взуття 41 розміру. Обчисліть ймовірність події B .

а) 0,6; б) 0,56; в) 0,5; г) 0,7.

2. Ймовірність того, що перший студент розв'яже задачу дорівнює 0,75, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана, якщо обидва студенти будуть розв'язувати її незалежно один від одного.

а) 0,06; б) 0,6; в) 0,26; г) 0,66.

3. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Ймовірність того, що перший банк не відмовить йому в наданні кредиту, становить 0,7, другий - 0,85. Знайти ймовірність того, що обидва банки відмовляться надавати кредит.

а) 0,045; б) 0,105; в) 0,255; г) 0,55.

4. Потрібний товар можна знайти у двох фірмових магазинах. Ймовірність того, що в першому магазині товар якісний, становить 0,9, у другому – 0,8. Знайти ймовірність того, що придбаний навмання товар у будь-якому з магазинів якісний.

а) 0,85; б) 0,98; в) 0,72; г) 0,75.

5. Фінансовий звіт фірми складається з 20 таблиць, які готували два економісти. Перший підготував – 12 таблиць, другий – 8 таблиць. Ймовірність помилки при складанні таблиць із боку першого економіста 0,1, з боку другого – 0,2. У вибраній навмання таблиці допущено помилку. Яка ймовірність того, що цю таблицю готував другий економіст?

а) 0,43; б) 0,14; в) 0,57; г) 0,65.

Тема 27. Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі

Практичне заняття №33

План

1. Послідовності незалежних випробувань. Формула Бернуллі.
2. Локальна теорема Муавра-Лапласа. Інтегральна асимптотична теорема Лапласа.
3. Теорема Пуассона. Найімовірніше число появ випадкової події.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що

- а) відмовлять два блоки;
- б) відмовить хоча б один блок;
- в) відмовлять не менше двох блоків.

☺Позначимо за подію A відмову блока. Тоді ймовірність події A за умовою буде

$$P(A)=p=1-0,8=0,2, \text{ тому } q=1-p=1-0,2=0,8.$$

Згідно з умовою задачі $n=10$. Використовуючи формулу Бернуллі, одержимо

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 (0,2)^2 (0,8)^8 = 0,202;$

б) $P_{10}(1 \leq m \leq 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0,2)^0 (0,8)^{10} = 0,8926;$

$$в) P_{10}(2 \leq m \leq 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^0(0,2)^0(0,8)^{10} + C_{10}^1(0,2)^1(0,8)^9) = 0,6244. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2. За одну годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин імовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше 0,952, якщо імовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

☺ Застосовуючи формулу $n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$, знайдемо спочатку таку кількість виготовлених деталей, щоб з ймовірністю $p=0,952$ можна було стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі, якщо ймовірність браку за умовою $p=0,01$:

$$n \geq \frac{\ln(1-0,952)}{\ln(1-0,01)} = \frac{\ln 0,048}{\ln 0,99} \approx 300.$$

Отже, за час $t = \frac{300}{20} = 15$ (годин автомат) з ймовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь. ☺☺

Приклад 3. Ймовірність виготовлення деталі вищого гатунку на даному верстаті дорівнює 0,4. Знайти наближено ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина виявиться вищого гатунку.

☺ З умови маємо $p=0,4$; $q=1-0,4=0,6$; $n=26$; $m=13$. Тоді

$$np=26 \cdot 0,4=10,4; \quad npq=10,4 \cdot 0,6=6,24; \\ \sqrt{npq} = \sqrt{6,24} \approx 2,5; \quad m-np=13-10,4=2,6.$$

$$\text{Тому } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{2,6}{2,5} = 1,04.$$

Значення $\phi(x)$ при $x=1,04$ знаходимо з таблиці $\phi(x)=\phi(1,04)=0,2323$.

Тоді за формулою локальної теореми Муавра-Лапласа отримаємо

$$P_{26}(13) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,2323}{2,5} = 0,093. \text{ ☺☺}$$

Приклад 4. При звичайному технологічному процесі фабрика випускає в середньому 70 відсотків продукції першого гатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого гатунку міститься між 625 і 760 ?

☺ За умовою маємо $n=1000$, $p=0,7$, $q=1-0,7=0,3$, $m_1=652$, $m_2=760$, тому

$$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{652 - 700}{\sqrt{210}} = -\frac{48}{\sqrt{210}} = -3,3124,$$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{760 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{60}{\sqrt{210}} = 4,1405.$$

За таблицею для функції $\Phi(x)$ знаходимо, що

$$\Phi(4,1405)=0,4999, \quad \Phi(-3,3124)=-\Phi(3,3124)=-0,4954,$$

Отже,

$$P_{1000}(652 \leq m \leq 760) = \Phi(4,1405) - \Phi(-3,3124) = 0,4999 + 0,4954 = 0,9953. \text{ ☺☺}$$

Приклад 5. На факультеті 730 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно трьох студентів?

☹Ймовірність того, що днем народження окремого студента є 1 вересня дорівнює $p = 1/365$. Застосовуючи формулу Пуассона, де $n = 730$, $p = 1/365$, $m = 3$, $\lambda = np = 730 \cdot 1/365 = 2$, дістаємо

$$P_{730}(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0,18045. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 6. Частка виробів вищого гатунку на даному підприємстві складає 26%. Чому дорівнює найімовірніше число виробів вищого гатунку у випадково відібраній партії з 68 виробів?

☺За умовою маємо, що $p=0,26$, $n=68$, а $q=1-p=1-0,26=0,74$.

За формулою найімовірнішого числа появи події одержимо

$$68 \cdot 0,26 - 0,74 \leq m_0 \leq 68 \cdot 0,26 + 0,26,$$

Звідси

$$16,94 \leq m_0 \leq 17,94.$$

Отже, $m_0 = 17$. ☺☺

Завдання для виконання

1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.

2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія A відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.

3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних намання цукерок буде рівно 80 льодяників.

4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходять 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.

5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята намання з виготовленої партії виявиться вищого гатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого гатунку?

6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня.

7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?

8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?

9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.

10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуте 150 монет.

11. Завод виготовляє вироби, кожен з яких повинен проходити чотири види випробувань. Перше випробування виробу проходить вдало з імовірністю 0,9; друге – з імовірністю 0,95; реє – з імовірністю 0,8 і четверте – з імовірністю 0,85. Знайти імовірність того, що виріб пройде вдало: A – всі чотири випробування; B – рівно два випробування (з чотирьох); C – не менше двох випробувань (з чотирьох).

12. При в'їзді в нову квартиру в освітлювальну мережу було включено 2к нових лампочок. Кожна електролампочка протягом року перегорає з імовірністю p . Знайти імовірність того, що протягом року не менше половини перш початково включених лампочок треба буде замінити новими.

13. Що імовірніше, виграти у рівносильного противника: а) три партії з чотирьох або п'ять з восьми? б) не менше трьох партій з чотирьох або не менше п'яти з восьми?

14. Людина, яка належить до певної групи населення, з імовірністю 0,2 виявиться брюнетом, з імовірністю 0,3 – шатеном, з імовірністю 0,4 – блондином і з імовірністю 0,2 – рудим. Вибирається навмання група з шести осіб. Знайти імовірність наступних подій: A – в складі групи не менше чотирьох блондинів; B – в складі групи хоча б один рудий; C – в складі групи однакове число блондинів і шатенів.

15. Мішень складається з яблука і двох кілець. При одному вистрілі імовірність попадання в яблуко дорівнює p_0 , в перше кільце – p_1 , в друге – p_2 ; імовірність непопадання в мішень p_3 . По мішені зроблено п'ять вистрілів. Знайти імовірність того, що вони дадуть два попадання в яблуко і одне – в друге кільце.

16. Відбувається стрільба в ціль трьома снарядами. Снаряди попадають в ціль незалежно один від одного. Для кожного снаряда імовірність попадання в ціль дорівнює 0,4. Якщо в ціль попав один снаряд, він вражає ціль з імовірністю 0,3; якщо два снаряда – з імовірністю 0,7; якщо три снаряда – з імовірністю 0,9. Знайти повну імовірність ураження цілі.

17. Знайти імовірність того, що при 10000 випробуваннях за схемою Бернуллі відхилення відносної частоти події від її імовірності $p=0,2$ не перевищить $\varepsilon=0,01$.

18. В деякій системі є важливий вузол, імовірність безвідмовної роботи якого дорівнює p . Для підвищення надійності системи цей вузол можна дублювати так, щоб система працювала, якщо працює хоча б один з вузлів, що дублюються. Скільки разів треба дублювати вузол, щоб імовірність безвідмовної роботи системи перевищила заданий рівень P ($P > p$)?

19. Імовірність виходу із ладу окремого виробу під час випробувань на надійність становить $p=0,05$. Яка імовірність того, що за час випробувань 100 виробів вийдуть із ладу не менше 5 виробів?

20. Скільки треба провести незалежних випробувань, щоб з імовірністю 0,8 подія A , ймовірність появи якої в окремому досліді дорівнює $P(A)=0,05$, спостерігалась би не менше 5 разів?

21. Апаратура містить 2000 однакових за надійністю елементів, імовірність відмови кожного з них дорівнює 0,0005. Знайти імовірність відмови апаратури, якщо вона настає при відмові принаймні одного з елементів.

22. Імовірність того, що виріб не витримає контролю, дорівнює 0,001. Знайти імовірність того, що з 500 виробів принаймні два не витримують контролю.

23. Математичне очікування кількості відмов радіоапарата за 10000 годин дорівнює 10. Визначити імовірність відмови радіоапарата протягом 100 годин роботи.

24. Знайти імовірність того, що при 6000 підкиданнях грального кубика грань з двома очками випаде: а) 1000 разів; б) 900 разів.

25. Для кожного абонента імовірність зателефонувати на комутатор протягом однієї години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти імовірність того, що протягом однієї години зателефонують: а) 4 абоненти; б) не більше 1 абонента.

26. За статистикою 99,2% випуску виробів даного підприємства задовольняє вимогам стандарту. Знайти імовірність того, що в партії із 500 виробів кількість нестандартних буде меншою від 60.

27. За допомогою інтегральної граничної теореми визначити кількість підкидань грального кубика, щоб середнє число випадання певної грані відрізнялось від свого математичного очікування не більше, ніж на 0,01, з імовірністю 0,997.

28. Гральний кубик підкидається 6000 разів. Оцінити імовірність того, що середнє арифметичне значення числа випадання певної грані відрізняється від $1/6$ не більше, ніж на 0,01.

29. Ймовірність народження хлопчика $p=0,512$. Вважаючи, що виконуються умови локальної теореми Муавра-Лапласа та центральної граничної теореми, оцінити імовірності подій: A – серед 100 новонароджених буде 51 хлопчик; B – серед 100 новонароджених буде більше хлопчиків, ніж дівчаток.

30. Ймовірність народження хлопчика $p=0,512$. Вважаючи, що виконуються умови локальної теореми Муавра-Лапласа та центральної граничної теореми, оцінити імовірності події A – різниця між кількістю хлопчиків і кількістю дівчаток серед 100 новонароджених не перевищить 10.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Ймовірність того, що власник квартири не має заборгованості в оплаті за використання електроенергії (подія A), дорівнює $p=P(A)=0,6$. Яка ймовірність, що з 2400 власників квартир 1400 не мають названої заборгованості?

а) 0,0052; б) 0,052; в) 0,0041; г) 0,041.

2. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції - 0,8. Знайти ймовірність реалізації не менше ніж 75% із чотирьох навмання вибраних одиниць продукції.

а) 0,4096; б) 0,8192; в) 0,1808; г) 0,4008.

3. Виробник детекторів брехні вимагає, щоб детектори могли чітко розрізняти правильні відповіді від неправильних на 85%. Детектор тестують використовуючи 50 запитань. Визначте найбільш імовірне число правильних відповідей.

а) 43; б) 32; в) 37; г) 44.

4. Для кожного з 900 першокурсників ймовірність закінчити інститут дорівнює 0,9. Знайти межі в яких перебуватиме відносна частота кількості першокурсників, які закінчують інститут з ймовірністю 0,88.

а) (0,8844; 0,9156); б) (0,4421; 0,8856); в) (0,6452; 0,9236); г) (0,0844; 0,0156).

5. Ймовірність того, що у водія автомобіля настане страховий випадок 0,85. Нехай є група з 10 осіб. Знайти найімовірніше число водіїв, у яких настане страховий випадок.

а) 9; б) 8; в) 5; г) 1.

Тема 28. Дискретні випадкові величини

Практичне заняття №34

План

1. Поняття випадкової величини, види випадкових величин.
2. Закон розподілу дискретної випадкової величини (ДВВ) та способи його задання.
3. Числові характеристики ДВВ.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Експерт з банківського кредитування наголосив, що протягом місяця фірма *A* ліквідує свою заборгованість з ймовірністю 0,8; фірма *B* – з ймовірністю 0,9; а фірма *C* – з ймовірністю 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості фірм, які ліквідують заборгованість протягом місяця.

☺ДВВ X може набувати наступних значень: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Знайдемо їх ймовірності:

$$P(X = 0) = 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006.$$

$$P(X = 1) = 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 = 0,092.$$

$$P(X = 2) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,398.$$

$$P(X = 3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Запишемо закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

За законом нормування перевіримо:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1. \text{☺☺}$$

Приклад 2. Майстерня з виготовлення шоколаду має договори на постачання своєї продукції з трьома магазинами та двома кафе. Ймовірність виконання договору одним магазином становить 0,9, а одним кафе – 0,8. Знайти середню кількість постачальників сировини, які виконають договори.

☺Нехай X – число магазинів, Y – число кафе, що виконають договори. Складемо закони розподілу цих ДВВ:

Для випадкової величини X маємо: $p=0,9, q=0,1$.

Можливі значення X : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$p_0 = C_3^0 0,9^0 0,1^3 = 0,001.$$

$$p_1 = C_3^1 0,9^1 0,1^2 = 0,027.$$

$$p_2 = C_3^2 0,9^2 0,1^1 = 0,243.$$

$$p_3 = C_3^3 0,9^3 0,1^0 = 0,729.$$

Перевірка: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Тоді за формулою математичного очікування, маємо:

$$M(X) = 0 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,027 + 2 \cdot 0,243 + 3 \cdot 0,729 = 2,7.$$

Для випадкової величини Y маємо: $p = 0,8, q = 0,2$.

Можливі значення Y : $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$.

Ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$p_0 = C_2^0 0,8^0 0,2^2 = 0,04.$$

$$p_1 = C_2^1 0,8^1 0,2^1 = 0,32.$$

$$p_2 = C_2^2 0,8^2 0,2^0 = 0,64.$$

Перевірка: $p_0 + p_1 + p_2 = 0,04 + 0,32 + 0,64 = 1$.

Закон розподілу випадкової величини Y має вигляд:

y_i	0	1	2
p_i	0,04	0,32	0,64

Тоді за формулою математичного очікування, маємо:

$$M(Y) = 0 \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,32 + 2 \cdot 0,64 = 1,6.$$

За ймовірнісним змістом математичного очікування середнє число постачальників наближено дорівнює $M(X+Y)$, тобто $M(X+Y) = 1,6 + 2,7 = 4,3$.

Отже, середнє число постачальників дорівнює 4-5. ☺☺

Приклад 3. Для перевірки роботи 2-х продавців, було визначено суму, на яку клієнти магазину купують у них товар. У результаті дослідження була побудована наступна таблиця. Визначити, який з продавців працює краще?

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Кількість клієнтів	I продавець	200	400	1000	200	200
	II продавець	10	200	1500	280	10

☺ Побудуємо закон розподілу. Для цього розділимо на загальну кількість клієнтів значення кількості для кожної суми покупки. Загальна кількість клієнтів буде дорівнювати для першого продавця $200 + 400 + 1000 + 200 + 200 = 2000$, для другого – $10 + 200 + 1500 + 280 + 10 = 2000$.

Отже, обидва продавці обслужили однакову кількість клієнтів. Імовірність того, що клієнт придбає товар на суму 1 грн. для першого продавця буде $200/2000 = 0,1$, а для другого – $10/2000 = 0,005$. І так далі. Зведемо результати в таблицю, де значеннями випадкової величини буде сума, на яку клієнти придбали товар.

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Імовірність купівлі товару	I продавець	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1
	II продавець	0,005	0,1	0,75	0,14	0,005

Визначимо математичне очікування для кожного продавця:

$$M_1 = 1 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,1 = 9,6 \text{ грн.};$$

$$M_2 = 1 \cdot 0,005 + 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,75 + 15 \cdot 0,14 + 20 \cdot 0,005 \approx 10,3 \text{ грн.}$$

Отже в середньому, у другого продавця клієнти купляють товару на більшу суму, тому він працює краще. ☺☺

Приклад 4. На першому сегменті ринку дохід з рівними ймовірностями може складати 100 млн. грн. при доброму розпродажу продукції і 80 млн. грн. – при середньому. На другому сегменті ринку очікується стабільний дохід у розмірі 93 млн. грн. Однак, існує ймовірність (0,2) того, що попит різко впаде і дохід стане 78 млн. грн. Необхідно вибрати сегмент, оптимальний з погляду результативності та ризику.

☺ Спочатку знайдемо математичне очікування доходів при роботі на кожному із сегментів ринку:

$$M(X) = 0,5 \cdot 100 + 0,5 \cdot 80 = 90 \text{ (млн. грн.)},$$

$$M(Y) = 0,8 \cdot 93 + 0,2 \cdot 78 = 90 \text{ (млн. грн.)}.$$

Визначимо розкид результатів для кожного з варіантів:

$$M(X^2) = 0,5 \cdot 100^2 + 0,5 \cdot 80^2 = 8200.$$

$$D(X) = 8200 - 8100 = 100. \quad \sigma(X) = \sqrt{100} = 10 \text{ (млн. грн.)}.$$

$$M(Y^2) = 0,8 \cdot 93^2 + 0,2 \cdot 78^2 = 8136.$$

$$D(Y) = 8136 - 8100 = 36. \quad \sigma(Y) = \sqrt{36} = 6 \text{ (млн. грн.)}.$$

Отже, перший сегмент більш ризикований за другий (10 млн. > 6 млн.). Потрібно орієнтуватися на роботу у другому сегменті ринку, оскільки тут такий же очікуваний результат, як і на першому, але ризик менший. ☺☺

Завдання для виконання

1. Під час виробництва бракованого виробу підприємство може зазнати збитків. Закон розподілу X (тис. грн.) прибутків цього підприємства за деякий період має такий вигляд:

x_i	-20	-10	15	30
p_i	0,1	0,2	0,6	0,1

Знайти середню величину прибутку за цей період.

2. Фермер очікує, що в наступному році кури на його фермі нанесуть 100000 десятків яєць. Беручи до уваги різні витрати й коливання цін, фермер розраховує виручити не більш як 150 коп. за десяток яєць і витратити на них не більш як 90 коп. Ймовірність можливих виграшів і витрати такі:

Ціна за 10 яєць, коп.	150	130	110	0	-90
p_i	0,2	0,4	0,3	0,07	0,03

Визначити очікуваний прибуток від продажу одного десятка яєць і всіх 100000 десятків яєць.

3. Статистика по регіону свідчить, що 5% працездатних мешканців регіону є безробітними. Навмання вибирають три мешканця. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа безробітних осіб серед навмання відібраних трьох мешканців регіону.

4. Дискретна випадкова величина X – річний дохід підприємства (в млн. грн.) має тільки 2 можливих значення: x_1 та x_2 причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 рівна 0,2. Скласти закон розподілу величини X , знаючи її математичне очікування $M(X) = 2,6$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 0,8$.

5. Дискретна випадкова величина X – річний прибуток фірми (в млн. грн.) має тільки 3 можливих значення: $x_1 = 1$, x_2 та x_3 , причому $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 та x_2 відповідно дорівнюють 0,3 та 0,2. Скласти закон розподілу величини X , знаючи її математичне очікування $M(X) = 2,2$ і дисперсію, яка рівна 0,76.

6. Розглядається три варіанти виробництва нових товарів. Можливі прибутки від реалізації проектів у різних ситуаціях, а також ймовірності їх настання подано в таблиці.

Характеристика ситуації	Можливий дохід (тис. грн.)	Ймовірність настання ситуації
Проект А		
Песимістична	100	0,1
Найбільш ймовірна	250	0,6
Оптимістична	400	0,3
Проект В		
Песимістична	80	0,25
Найбільш ймовірна	300	0,5
Оптимістична	500	0,25

Проект С		
Песимістична	90	0,2
Найбільш ймовірна	300	0,6
Оптимістична	400	0,2

Вибрати варіант оптимальний з погляду результативності та ризику.

7. За даними відділу маркетингу підприємства з ймовірностями 0,7, 0,6, 0,3 прогнозується підвищення попиту на кожний з трьох видів продукції, що реалізується. Скласти закон розподілу числа видів продукції, для яких прогнозується підвищення попиту.

8. Компанія визначає ймовірності наступу економічного росту так: сильного – 0,3; середнього – 0,5; слабого – 0,2. Грошові надходження у проекти А, В, С, за якими прогнозується можливий економічний ріст, передбачаються згідно з даними таблиці. Прийняти рішення щодо вкладення інвестицій.

Рівень економічного росту	Ймовірність	Очікувані грошові надходження, млн. грн.		
		А	В	С
Сильний	0,3	5,2	2,9	3,4
Середній	0,5	2,2	2,1	2,6
Слабкий	0,2	0,2	1,6	0,5

9. Фірма «Христина» виробляє парфумерну продукцію. Протягом року реалізується 200, 220, 240 чи 250 упаковок продукції. Від продажу кожної упаковки фірма одержує 160 грн. прибутку. Парфумерія має малий термін придатності, тому, якщо упаковка не продана за рік, вона повинна бути знищена. Виробництво однієї упаковки обходиться в 420 грн. Якщо упаковка не продана під кінець року, фірма понесе збитки. Імовірності продати 200, 220, 240 чи 250 упаковок за рік складають відповідно 0,1; 0,4; 0,3; 0,2. Скільки упаковок варто випускати фірмі щорічно?

10. Випадкова величина X – число підприємців із кожних десяти, які декларують не весь товар під час перетину кордону, розподілена за таким законом:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,28	0,15	0,1	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,02	0,01

Знайти числові характеристики випадкової величини X .

11. Цінні папери певної категорії можуть за добу залишитися в ціні з ймовірністю 0,5, а в протилежному випадку їхня ціна збільшується на 10%. Початкова вартість цінних паперів 5000 грн., ξ – вартість цінних паперів зазначеного типу через два дні. Знайти закон розподілу випадкової величини.

12. Цінні папери певної категорії можуть за добу залишитися в ціні з ймовірністю 0,5, а в протилежному випадку їхня ціна збільшується на 10%. Початкова вартість цінних паперів 5000 грн., ξ – вартість цінних паперів

зазначеного типу через два дні. Знайти математичне сподівання вартості цінних паперів через два дні та підрахувати стандартне відхилення.

13. Випадкова величина ξ має розподіл

ξ	1	-1
p_i	1/2	1/2

Знайти числові характеристики випадкової величини ξ .

14. Випадкова величина ξ має розподіл

ξ	1	-1	2
p_i	1/3	1/2	1/6

Знайти числові характеристики випадкової величини ξ .

15. Продавець квітів готує для продажу у святкові дні по 100 букетів на день. Залежно від кон'юнктури ринку йому вдається продати всі букети в 50% днів; в 30% днів вдається продати по 80 букетів і в 20% днів – 60 букетів. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення чистого прибутку продавця, якщо один букет він продає за 10 грн при його собівартості у 5 грн, якщо всі непродані букети продавець залишає перекупщику по собівартості.

16. Підприємець взяв у банку позику для розвитку виробництва і має повернути через рік 50000 грн. Чистий прибуток підприємця до цього становив 40000 грн в рік. Після виконання запланованих заходів щодо розвитку виробництва з імовірністю 0,8 його дохід подвоївся, а з імовірністю 0,2 залишиться незмінним. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення чистого доходу підприємця через рік.

17. Денна виручка у продавця хлібного квасу в травні місяці залежить від стану погоди в цей день: сонячні дні (таких днів 50%) виручка становить 300 грн, в похмурі дні (таких днів 40%) – 250 грн, в холодні дні (таких днів 10%) – 180 грн. Обчислити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення обсягу виручки продавця за один день.

18. Для того, щоб дізнатися, скільки риб в озері, відловлюють 1000 риб, мітять їх і відпускають назад в озеро. При якій кількості риб буде найбільшою ймовірність зустріти серед знову зловлених 150 риб 10 мічених.

19. Для того, щоб дізнатися, скільки риб в озері, відловлюють 1000 риб, мітять їх і відпускають назад в озеро. Знайти математичне сподівання числа зловлених мічених риб, якщо загальне число риб в озері - 15000.

20. Оптова база постачає товаром 10 магазинів, від кожного з якого може надійти заявка на черговий день з імовірністю 0,4 незалежно від заявок інших магазинів. Знайти найімовірніше число в день і ймовірність отримання цього числа заявок.

21. 31% продукції, о виробляє завод, - вищого гатунку. Скільки деталей вищого гатунку найбільш імовірно знайти в партії з 99 деталей?

22. Знайти імовірніше число від'ємних і додатних похибок і відповідну імовірність при чотирьох вимірах, якщо при кожному вимірюванні ймовірність додатної похибки дорівнює $2/3$, від'ємної – $1/3$.

23. б) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,3$; $M\eta=2,2$; $D\eta=7,56$.

24.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,2$; $M\eta=2,6$; $D\eta=0,64$.

25. а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,3$; $M\eta=3,1$; $D\eta=1,89$.

26.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,4$; $M\eta=2,6$; $D\eta=0,24$.

27.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,5$; $M\eta=3$; $D\eta=1$.

28.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубіку випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубіку випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,6$; $M\eta=3,2$; $D\eta=2,16$.

29.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубики випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубики випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,7$; $M\eta=3,3$; $D\eta=0,21$.

30.а) Одночасно і незалежно підкинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо принаймні на одному кубики випала одиниця; приймає значення 1, якщо одиниця не випала жодного разу, але принаймні на одному кубики випала двійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ .

б) Знайти закон розподілу випадкової величини η , якщо вона може набувати тільки два значення x_1 і $x_2 > x_1$ і відомо, що $P(\eta=x_1)=0,9$; $M\eta=4,1$; $D\eta=0,09$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. У сейфі лежать 200 банкнот, з яких 50 – по 500 грн., 40 – по 200 грн., 40 – по 100 грн., 70 – по 50 грн. Із сейфа навмання вибирають одну банкноту. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – вартості вийнятої банкноти у формі таблиці:

x_i	500	200	100	50
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

а) $p_1 = 0,25$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,2$, $p_4 = 0,35$;

б) $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,35$, $p_4 = 0,3$;

в) $p_1 = 0,25$, $p_2 = 0,35$, $p_3 = 0,2$, $p_4 = 0,2$;

г) $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,35$, $p_4 = 0,25$.

2. Підприємство використовує два види сировини. Ймовірності зриву поставок кожної з них відповідно дорівнюють 0,1; 0,05. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа видів сировини, поставка яких буде зірвана.

а)

x_i	0	1	2
p_i	0,855	0,005	0,14

б)

x_i	0	1	2
p_i	0,005	0,855	0,14

в)

x_i	0	1	2
p_i	0,855	0,14	0,005

г)

x_i	0	1	2
p_i	0,005	0,14	0,855

3. Відомо, що серед готівкової маси 0,5% купюр є непридатними до наступного використання. Скласти закон розподілу величини X – числа купюр, непридатних до наступного використання, серед двох навмання взятих.

а)	x_i	0	1	2
	p_i	0,990025	0,00995	0,000025

б)	x_i	0	1	2
	p_i	0,00995	0,990025	0,000025

в)	x_i		1	2
	p_i	0,00995	0,000025	0,990025

г)	x_i	0	1	2
	p_i	0,000025	0,00995	0,990025

4. Компанія визначає ймовірності настання економічного росту так: сильного – 0,2; середнього – 0,6; слабого – 0,2. Грошові надходження у проекти А, В, за якими прогнозується можливий економічний ріст, передбачаються згідно з даними таблиці. Прийняти рішення щодо вкладення інвестицій.

Рівень економічного росту	Ймовірність	Очікувані грошові надходження, тис. грн.	
		А	В
Сильний	0,2	5,2	3,3
Середній	0,6	2,1	5,6
Слабкий	0,2	0,2	2,2

а) варіант А; б) варіант В; в) вибрати неможливо жоден з варіантів; г) варіанти А і В.

5. Випадкова величина X – місячний прибуток фірми (в дес. тис. грн.) може приймати лише три значення $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0,5$, значення $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_2 = 0,2$, значення x_3 з ймовірністю p_3 . Знайти x_3 і p_3 , якщо $M(X) = 8$.

а) $x_3 = 16, p_3 = 0,4$; б) $x_3 = 16, p_3 = 0,3$; в) $x_3 = 16, p_3 = 0,2$; г) $x_3 = 16, p_3 = 0,1$.

Тема 29. Неперервні випадкові величини

Практичне заняття №35

План

1. Інтегральна функція розподілу ймовірностей.
2. Диференціальна функція розподілу ймовірностей.
3. Числові характеристики неперервної ВВ.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Випадкову величину X – витрати електроенергії на фірмі в кВт за годину роботи задано функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність $p(2,5 \leq X \leq 5)$.

☺ За властивістю $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ отримаємо

$$p(2,5 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2,5) = 1 - (1,25 - 1) = 0,75. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 2. Дано функцію сподівання розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a\sqrt{x}, & 1 < x \leq 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Визначити число a .

☺ За умовою нормування $\int_1^9 a\sqrt{x}dx = 1$.

$$\text{Отже, } a \int_1^9 \sqrt{x}dx = a \cdot \frac{2}{3} \cdot (9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = 1, \quad \frac{2}{3}a(27 - 1) = 1,$$

$$\text{звідси } a = \frac{3}{52}. \quad \text{☺☺}$$

Приклад 3. Знайти математичне сподівання випадкової величини, яка задана

$$\text{функцією розподілу } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

☺ Знайдемо диференціальну функцію розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

За формулою математичного очікування, маємо:

$$M(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9} dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{0^3}{3} = 2. \quad \text{☺☺}$$

Завдання для виконання

1. Функція розподілу кількості прибутку X задана у вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a .

2. Дана функція розподілу неперервної величини X – величини доходу підприємства:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу $f(x)$.

3. Задана щільність розподілу випадкової величини X : $f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$. Знайти сталий множник C .

4. Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} x - 0,5, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x \leq 1, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу X .

5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Знайти сталу C та функцію розподілу $F(x)$.

6. Випадкова величина X – кількість прибутку підприємства в інтервалі $(0;5)$ задана густиною розподілу $f(x) = \frac{2}{25}x$, зовні цього інтервалу $f(x)=0$. Знайти математичне сподівання та дисперсію X .

7. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – коливання курсу валют, яка задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

8. Задано щільність розподілу кількості прибутку X : $f(x) = ae^{-|x|}$. Знайти коефіцієнт a та ймовірність одержання величини прибутку X із відрізка $[0,5;1]$ млн. грн.

9. Випадкова величина доходу підприємства X має диференціальну функцію

розподілу: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0,2, & -2 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

Знайти дисперсію та ймовірність одержання доходу $x \in (1;5)$.

10. Випадкова величина X має функцію розподілу $F(x) = 1 - \frac{1}{x}$, при $x \geq 1$ і $F(x) = 0$, при $x < 1$. Знайти a , для якого $p(X > a) = \frac{1}{3}$.

11. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq \frac{1}{4}; \\ 16x, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}; \\ 0, & x > \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X .

12. Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу ймовірності
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2}{e^{2x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики випадкової величини X .

13. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq \frac{1}{4}; \\ 8x^2, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}; \\ 1, & x > \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Переконайтесь, що X має щільність розподілу ймовірностей і знайдіть її.

14. Випадкова величина X має функцію розподілу:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ \frac{a(x+4)^2}{16}, & -4 < x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти параметр a для якого: а) X є абсолютно неперервною, а також знайти аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність влучення значень випадкової величини X в інтервал $(-2;5)$; б) X не є абсолютно неперервною, а також знайти $P(X \in (-2;5))$.

15. Випадкова величина X має функцію розподілу:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ a\sqrt{2x}, & 0 < x \leq 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Знайти параметр a , аналітичний вираз для щільності розподілу та ймовірність влучення значень випадкової величини X в інтервал $(1;6)$.

16. При яких значеннях параметрів a і b функція $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq a; \\ \sin x, a < x \leq b; \\ 1, x > b. \end{cases}$ буде

функцією розподілу деякої абсолютно неперервної випадкової величини? Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

17. При яких значеннях параметрів a і b функція $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq a; \\ \operatorname{tg} x, a < x \leq b; \\ 1, x > b. \end{cases}$ буде

функцією розподілу деякої абсолютно неперервної випадкової величини? Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

18. При яких значеннях параметрів a і b функція $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq a; \\ \sin x, a < x \leq b; \\ 0, x > b. \end{cases}$ може бути

щільністю розподілу деякої випадкової величини X . Знайти функцію розподілу даної випадкової величини й ймовірність влучення значень випадкової величини X в проміжок $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$.

19. Випадкова величина X має функцію розподілу: $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq -2; \\ a, -2 < x \leq 5; \\ 0, x > 5. \end{cases}$

Знайти параметр a , функцію розподілу та ймовірність влучення значень випадкової величини X в інтервал $(0; 3]$.

20. Випадкова величина X має нормальний розподіл із параметрами a , σ . Записати вираз для щільності та функції розподілу даної випадкової величини і знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень з проміжку $(\alpha; \beta]$, якщо:

а) $a=0$, $\sigma=1$, $\alpha=0$, $\beta=5$;

б) $a=5$, $\sigma=3$, $\alpha=2$, $\beta=8$;

в) $a=9$, $\sigma=2$, $\alpha=3$, $\beta=15$.

21. Випадкова величина X має показниковий розподіл із параметром $\lambda=3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[\alpha; \beta]$, якщо: а) $\alpha=-2$, $\beta=-1$; б) $\alpha=2$, $\beta=3$; в) $\alpha=-2$, $\beta=3$.

22. Випадкова величина X має експотенціальний розподіл. Ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з проміжку $[0; 5]$, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, ця випадкова величина набуде значення з проміжку $[7; 9]$.

23. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \dots, & \text{при } 4 < x \leq 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (4;0); і (10;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (2;4).

24. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \dots, & \text{при } 2 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (4;0); і (10;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (3;7).

25. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ \dots, & \text{при } 3 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (4;0); і (10;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (4;6).

26. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \dots, & \text{при } 4 < x \leq 10 \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з

координатами (4;0); і (10;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (5;8).

27. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ \dots, & \text{при } 1 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (1;0); і (8;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (3;5).

28. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ \dots, & \text{при } 3 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (3;0); і (8;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (5;7).

29. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \dots, & \text{при } 4 < x \leq 9 \\ 1, & \text{при } x > 9 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (4;0); і (9;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (6;8).

30. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ \dots, & \text{при } 1 < x \leq 8 \\ 1, & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

Знайти: а) замість крапок треба надати аналітичний запис лінійної залежності ймовірності, використавши рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки з координатами (1;0); і (8;1); б) диференціальну функцію $f(x)$; в) побудувати графіки $F(X)$ і $f(x)$; г) математичне сподівання; д) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; е) ймовірність того, що X набуває значення із інтервалу (6;9).

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Студент пам'ятає, що щільність показникового розподілу має вигляд: $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, але забув, чому рівна стала C .

а) $-\lambda$; б) λ^2 ; в) λ ; г) λ^3 .

2. Випадкова величина X задана густиною розподілу $f(x) = 2x$ в інтервалі (0;2) і $f(x) = 0$ зовні цього інтервалу. Знайти математичне очікування величини X .

а) $\frac{3}{2}$; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.

3. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}. \text{ Знайти } \sigma(X).$$

а) $\frac{2}{9}$; б) 0,471; в) 2; г) 2,1.

4. Густина розподілу ймовірностей НВВ X має вигляд: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{2}{9}(x-2), & 2 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

Для якого числа $m \in (0;5]$ імовірність $p(m < x \leq 5) = \frac{8}{9}$?

а) 1; б) 2,5; в) 3; г) 2.

5. Розподіл ймовірностей НВВ X заданий густиною:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,5, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення $\sigma(x)$?

- а) $\frac{1}{3}$; б) 4; в) $\frac{4}{9}$; г) 3.

Тема 30. Основні закони розподілу випадкових величин

Практичне заняття №36

План

1. Закони розподілу дискретної випадкової величини: біноміальний закон розподілу, розподіл Пуассона, геометричний та гіпергеометричний розподіли.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Митний пост дає наступну статистичну оцінку: 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, який підлягає оподаткуванню. Випадково вибрано три особи. Потрібно записати закон розподілу випадкової величини X – кількості осіб, що не декларують весь товар, привезений з-за кордону.

☺Обчислимо ймовірності:

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{3-0} = 0,512.$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{3-1} = 0,384.$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{3-2} = 0,096.$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{3-3} = 0,008.$$

Запишемо закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

☺☺

Приклад 2. Ймовірність погашення банківського кредиту кожним клієнтом становить 0,8. Знайти математичне очікування випадкової величини X – числа клієнтів серед вибраних 10, які своєчасно і в повному обсязі повернуть кредити банків.

☺Оскільки своєчасне погашення кредиту одним клієнтом не залежить від того, чи поверне кредит інший, і ймовірність своєчасного погашення кредиту кожним клієнтом є однакова, то маємо послідовність випробувань за схемою Бернуллі. У даному випадку $n=10$, $p=0,8$ і $M(X)=10 \cdot 0,8=8$, тобто, в середньому, 8 із 10-ти клієнтів погасять кредити своєчасно. ☺☺

Приклад 3. Електронна пошта банку підтримує зв'язки з сотнею абонентів. Імовірність того, що за одиницю часу на електронну пошту надійде повідомлення від абонента, становить 0,02. Написати закон розподілу величини X – числа надходження сигналів від абонентів. Яка при цьому з подій є найбільш імовірною: B – за одиницю часу надійдуть сигнали від одного абонента, C – за одиницю часу надійдуть сигнали від трьох абонентів.

☺ У даному випадку проводиться $n=100$ випробувань за схемою Бернуллі і випадкова величина X може набувати значень $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, \dots, x_{100}=100$. Ймовірність події A – надходження сигналу від одного абонента є мала, а число $n=100$ є велике і $\lambda=100 \cdot 0,02=2$, тому відповідні ймовірності обчислюються за формулою Пуассона:

$$p_0 = P_{100}(0) \approx e^{-2} \approx 0,1353.$$

$$p_1 = P_{100}(1) \approx 2e^{-2} \approx 0,2707.$$

$$p_3 = P_{100}(3) \approx \frac{4}{3}e^{-2} \approx 0,1804.$$

$$p_4 = P_{100}(4) \approx \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0,0902.$$

...

$$p_{100} = P_{100}(100) = 1 - \sum_{i=0}^{99} P_{100}(i).$$

Закон розподілу описаної в задачі ДВВ X записуємо у формі таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	...
p_i	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	...

Із наведеної таблиці видно, що $p(B)=0,2707$ і $p(C)=0,1804$, тобто, більш ймовірно, що сигнали надійдуть від одного абонента, а ніж від трьох. ☺☺

Приклад 4. У супермаркет відправлено 3000 скляних пляшок мінеральної води «Боржомі». Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка буде розбита, дорівнює 0,001. Знайти:

а) математичне очікування випадкової величини X – кількості розбитих пляшок;

б) дисперсію X – кількості розбитих пляшок.

☺ Маємо розподіл Пуассона, тому що n досить велике, а $p=0,001$. Тоді:

а) математичне очікування випадкової величини $M(X)=np=3000 \cdot 0,001=3$ – середня кількість розбитих пляшок;

б) дисперсія $D(X)=M(X)=3$. ☺☺

Завдання для виконання

1. У деякій агенції кожне замовлення виконується частинами незалежно у трьох відділах. Ймовірність того, що якийсь відділ не виконає свою частину роботи вчасно, становить 0,2. Скласти закон розподілу числа відділів, що не вклалися у термін виконання даного замовлення.

2. Статистика свідчить, що 9% працездатних мешканців регіону є безробітними. Навмання вибирають 4 мешканці. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа безробітних осіб серед навмання вибраних 4 мешканців регіону. Знайти:

а) ймовірність того, що не більше ніж двоє осіб серед чотирьох вибраних мешканців регіону є безробітними;

б) найімовірніше число безробітних осіб серед 4 вибраних мешканців регіону.

3. Робітник виготовляє певний тип деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед 150 виготовлених (за формулою Пуассона). Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей виявиться не більше 2 бракованих.

4. У військовому містечку 99,99% мешканців хоча б раз в житті користувались послугами страхових компаній. Проводять соціологічні дослідження серед 20000 навмання взятих мешканців. Визначити дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа мешканців, які жодного разу не користувались послугами страхових компаній.

5. Ймовірність того, що деталь виготовлена на автоматичному станку без дефектів, рівна 0,1. Працівник державної служби прийомки перевіряє якість усіх щойно виготовлених деталей до виявлення деталі з дефектом. Припускаючи, що цей процес може продовжуватись нескінченно довго, скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості перевірок до виявлення деталі з дефектом.

6. У партії електронних виробів з 12 одиниць 9 стандартних. Працівник державної служби прийомки навмання відбирає два вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних.

7. Ціна поділу шкали ваг 0,2. Покази ваг округлюються до найближчого цілого поділу шкали. Знайти ймовірність того, що при зважуванні буде зроблена похибка менша 0,04.

8. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером при складанні балансу, розподіляються у відсотках за нормальним законом з параметрами $a = 0,5$ і $\sigma = 0,01$. Написати функцію і густину розподілу цих помилок та намалювати їх графіки. В яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973?

9. Середня ціна деякої великої кількості акцій корпорації становить 12,8 у.о., а середнє квадратичне відхилення 3 у.о. Припускаємо, що ціни розподілені за нормальним законом. Знайти: а) яку частку акцій продають за ціною, не вищою від 10 у.о.? б) яка ймовірність того, що навмання взята акція матиме ціну від 11 до 14 у.о.? в) нижче від якої ціни продаються 20% найдешевших акцій?

10. Банк провів дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не меншим ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються зі середнім числом 1859 у.о. і середнім квадратичним відхиленням – 350 у.о. Визначити ймовірність того, що навмання

вибрана особа має заощадження: а) більше ніж 220 у.о.; б) менше ніж 1500 у.о.; в) у межах від 1080 у.о. до 2375 у.о.; г) менше ніж 800 у.о.

11. Симетрична монета підкидається 3 рази. Випадкова величина X - кількість аверсів, які при цьому випадали. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини, вважаючи рівноймовірними випадання аверсу та реверсу.

12. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми (вважаючи народження хлопчика і дівчинки рівноймовірними подіями).

13. Стрілець робить 4 постріли по мішені. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості влучень, вважаючи, що ймовірність влучення при одному пострілі 0,7.

14. Студент знає відповідь на 20 питань з 25. Навмання і за умови рівноможливості виймається 5 питань. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості питань, на які студент знає відповідь.

15. У ящику знаходяться кульки - 7 зелених і 3 жовті. Навмання і за умови рівноможливості вибирається кулька, фіксується її колір, і кулька повертається до ящика. Випробування повторюється 4 рази. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X , яка дорівнює кількості зелених кульок, які з'явилися при вийманні.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Завод відправив на базу 500 комп'ютерів. Ймовірність пошкодження комп'ютера при транспортуванні рівна 0,2%. Знайти дисперсію випадкової величини X - числа комп'ютерів вказаної партії, які будуть пошкоджені при транспортуванні.

а) 1; б) 0,002; в) 0,5; г) 0,02.

2. Ймовірність того, що виріб, виготовлений на автоматичному станку, буде першого або другого ґатунку рівна 0,8. Для контролю якості регулювання станка майстер періодично перевіряє один за одним вироби, але не менше 5 штук кожного разу. При знаходженні виробів нижче другого ґатунку станок зупиняється на регулювання. Вважаючи, що ймовірність виготовлення виробів першого і другого ґатунків залишається постійною, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок виробів, які майстер здійснює при одній серії випробувань.

а)	x_i	1	2	3	4	5
	p_i	0,16	0,128	0,2	0,1024	0,4096

б)	x_i	1	2	3	4	5
	p_i	0,128	0,16	0,2	0,1024	0,4096

в)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

г)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,16	0,2	0,128	0,1024	0,4096

3. Фірма відвантажила споживачеві 60000 виробів. Ймовірність того, що при транспортуванні один виріб буде пошкоджений, становить 0,0001. Випадкова величина X – число пошкоджених виробів – розподілена за законом Пуассона. Знайти математичне очікування X .

а) 3; б) $\sqrt{6}$; в) 6; г) $\sqrt{3}$.

4. Годинна витрата електроенергії в будинку є випадковою величиною з нормальним розподілом, математичне очікування якої дорівнює 3 кВт, а дисперсія становить 36 кВт². Оцінити ймовірність того, що найближчої години витрата електроенергії в цьому будинку буде від 4 до 11 кВт.

а) 0,3407; б) 0,4307; в) 0,7403; г) 0,4037.

5. Відомо, що серед готівкової маси 0,5% купюр є непридатними до наступного використання. Скласти закон розподілу величини X – числа нестандартних купюр серед двох навмання взятих, а також знайти $M(X)$ та $\sigma(X)$.

а)

x_i	0	1	2
p_i	0,990025	0,00995	0,000025

б)

x_i	0	1	2
p_i	0,00995	0,990025	0,000025

в)

x_i	0	1	2
p_i	0,000025	0,00995	0,990025

г)

x_i	0	1	2
p_i	0,990025	0,000025	0,00995

Практичне заняття №37

План

1. Закони розподілу неперервної випадкової величини: рівномірний, нормальний, показниковий.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи двигуна між технічними обслуговуваннями рівний 100 годинам. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин.

☺Нехай випадкова величина X - час безвідмовної роботи.

Середній час безвідмовної роботи рівний його математичному очікуванню:
 $M(X) = 100$.

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \lambda = \frac{1}{M(X)} = 0,01.$$

$$\text{Тоді } p(0 \leq X \leq 80) = e^{-0,01} - e^{-80 \cdot 0,01} = 1 - 0,4493 = 0,5507. \text{ ☺☺}$$

Приклад 2. Фірма, що займається продажем товарів за каталогом, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12439. Знайти середнє число замовлень, що отримуються фірмою за місяць.

☺Середнє число замовлень є математичним очікуванням випадкової величини.

За формулою $p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ маємо

$$p(12439 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{12439 - M(X)}{560}\right) = 0,9.$$

$$0,5 - \Phi\left(\frac{12439 - M(X)}{560}\right) = 0,9.$$

$$\frac{M(X) - 12439}{560} = 1,282.$$

$$M(X) = 13157. \text{ ☺☺}$$

Приклад 3. Середній дохід $\bar{X}$ на душу населення дорівнює 8000 у.о. В яких межах можна практично гарантувати дохід X на душу населення, якщо випадкова величина X нормально розподілена зі середнім квадратичним відхиленням 200 у.о.

☺Використаємо правило «трьох сигм», за яким $|X - a| < 3\sigma$. У даному випадку

$$M(X) \approx \bar{X} = 8000, \sigma = 200, \text{ і маємо: } |X - 8000| < 3 \cdot 200, \text{ тоді } -600 < X - 8000 < 600, \\ 7400 < X < 8600.$$

Отже, практично можна гарантувати, що середній дохід на душу населення коливається в межах від 7400 у.о. до 8600 у.о. ☺☺

Завдання для виконання

1. У групі з 20 студентів троє відмінників. Випадково і за умови рівноможливості вибирається 4 студенти. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості відмінників серед вибраних студентів.

2. Серед 10 деталей є 2 браковані. Для контролю навмання і за умови рівноможливості вибирають 3 деталі. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості бракованих деталей серед вибраних.

3. Знайти числові характеристики випадкової величини Y , яка дорівнює кількості вгаданих номерів у лотереї «5 із 36» за умови рівноможливості вибору.

4. Кубик підкидається доти, поки не випаде шістка. X - випадкова величина, яка дорівнює кількості підкидань. Знайти числові характеристики випадкової величини X і $P(|X - M(X)| < 3\sigma(X))$ за умови рівноможливості випадання кожної грані.
5. Гравець грає в рулетку до свого першого виграшу, кожного разу ставлячи на червоне й повторюючи ставку. X - випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб, Y - випадкова величина, яка дорівнює виграшу гравця. Знайти числові характеристики випадкових величин X і Y , вважаючи, що гравець має необмежену кількість грошей і розмір ставки не обмежений правилами.
6. Магазин отримав 10000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості розбитих пляшок.
7. Підручник видано тиражем 10000 екземплярів. Ймовірність того, що зброшурований екземпляр виявиться неякісним, дорівнює 0,001. Знайти числові характеристики випадкової величини, яка дорівнює кількості неякісних екземплярів.
8. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Ймовірність того, що протягом 1 хв на АТС надійде виклик від абонента, дорівнює 0,0004. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка дорівнює кількості викликів, що надійшли на АТС протягом 1 хв.
9. Ймовірність влучення у мішень, що рухається, з пістолета дорівнює 0,001. Відбувається 2000 пострілів. Знайти числові характеристики випадкової величини Y , яка дорівнює кількості влучень у мішень.
10. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відріжку $[1; 11]$. Знайти числові характеристики цієї величини.
11. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[7; a]$, причому щільність на цьому проміжку дорівнює $1/20$. Зазначити значення параметра a і числові характеристики випадкової величини X .
12. Коробки з шоколадом пакуються автоматично, їх середня маса дорівнює 1,06 кг. Вважаючи, що маса коробок розподілена за нормальним законом, знайти стандартне відхилення, якщо 5 % коробок мають масу менше 1 кг.
13. Випадкова величина X має нормальний розподіл ймовірностей з параметрами $\mu = 5$, $\sigma = 1$. Яка ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[5, +\infty)$?
14. Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює кількості очок, які випануть при підкиданні кубика. Вважаючи, що $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , а також моду і медіану.
15. У ящику лежить 5 пронумерованих кульок (номери від 1 до 5). Навмання виймається кулька. Випадкова величина X – номер кульки. Вважаючи, що ймовірність дістати будь-яку кульку однакова, знайти математичне сподівання,

дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , а також моду і медіану.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Маса виловленої риби є неперервною нормально розподіленою випадковою величиною X з параметрами $M(X)=375$ г, $\sigma(X)=20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде проведено з похибкою, що не перевищує за абсолютною величиною 10 г.

а) 0,338; б) 0,833; в) 0,383; г) 0,333.

2. Маса пакунків з цукром є випадковою величиною X , що підкоряється нормальному розподілу з математичним очікуванням 1000 г та стандартним відхиленням 0,5 г. Записати густину ймовірностей X .

а) $f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1000)^2}{2 \cdot 0,5^2}}$; б) $f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-0,5)^2}{2 \cdot 0,5^2}}$;

в) $f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-0,5)^2}{2 \cdot 1000^2}}$; г) $f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1000)^2}{2 \cdot 1000^2}}$.

3. Коробки з цукерками упаковуються на кондитерській фабриці автоматично. В середньому маса однієї коробки дорівнює 1,06 кг. Знайти середнє квадратичне відхилення, якщо 5% коробок мають масу меншу 1 кг. (передбачається, що маса коробок розподілена нормально).

а) 0,365; б) 0,0365; в) 0,0356; г) 0,0536.

4. Автобуси ходять з інтервалом 5 хв. Вважаючи, що випадкова величина X – час очікування автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному проміжку часу, знайти середній час очікування.

а) 2,5; б) $\frac{25}{12}$; в) 6,25; г) 5,25.

5. За статистичними даними річний дохід населення міста N має нормальний розподіл із середнім значенням 3 тис. грн. та середнім квадратичним відхиленням 1 тис. грн. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний житель міста має дохід менше 6 тис. грн.

а) 0,0027; б) 0,9973; в) 0,9; г) 0,027.

Тема 31. Граничні теореми теорії ймовірностей

Практичне заняття №38

План

1. Поняття про граничні теореми теорії ймовірностей.
2. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.

Методичні рекомендації та вказівки до виконання завдань

Приклад 1. Сума всіх вкладів у банках становить 2000 у.о., а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 100 у.о., дорівнює 0,8. Що можна сказати про кількість вкладників цього банку?

☺ Нехай X – величина випадково вибраного вкладу, N – кількість усіх вкладників. Тоді з умови задачі випливає, що $M(X) = \frac{2000}{N}$.

Оскільки ймовірність $(X < 100) = 0,8$ і за нерівністю Маркова $p(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, то $0,8 \geq 1 - \frac{2000}{100N}$. Звідки $\frac{2000}{100N} \geq 0,2$. Отже, отримаємо: $N \leq 100$. ☺☺

Приклад 2. У касі банківської установи залишилась сума $d = 3500$ у.о. У черзі за отриманням грошей стоять 20 осіб. Сума X , яку потрібно виплатити окремій особі, – випадкова величина з математичним очікуванням $M(X) = 150$ у.о. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 60$ у.о. Знайти ймовірність того, що суми d не вистачить для виплати грошей усім особам, які стоять у черзі.

☺ Використовуючи центральну граничну теорему для однаково розподілених доданків X_i при великому n ($n = 20$ можна практично вважати великим),

випадкова величина $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$, де X_i – сума, яку потрібно виплатити i -ій особі, має приблизно нормальний розподіл із параметрами: $M(Y_n) = nM(X)$, $D(Y_n) = nD(X)$, $\sigma(Y_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$ або $M(Y_n) = 20 \cdot 150 = 3000$, $\sigma(Y_n) = \sqrt{20} \cdot 60 \approx 268$. Тоді

$$P(Y_n > 3500) = 1 - P(Y_n \leq 3500) \approx 1 - 0,5 - \Phi\left(\frac{3500 - 3000}{268}\right) = 0,5 - \Phi(1,87) \approx 0,0307.$$

Отже, з імовірністю, близькою до 0,0307, наявної в касі суми грошей не вистачить для виплати всім бажаючим. ☺☺

Завдання для виконання

1. Деякий проміжок часу на біржі спостерігався відносно стабільний курс валют. На основі даних біржової статистики на цей період було складено таку таблицю можливих змін курсу валют:

Можлива зміна курсу, %	-1	-0,5	0	0,5	1
Імовірність зміни	0,1	0,3	0,5	0,005	0,005

За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що

$$p|X - M(X)| < 0,54.$$

2. Відомо, що 75% продукції, яка виробляється підприємством, – вищого гатунку. Оцінити ймовірність того, що число виробів першого гатунку серед 200000 виготовлених буде відрізнятися від математичного очікування цього числа не більше, ніж на 2000 шт.
3. Середньодобове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 15000 кВт·год. Визначити ймовірність того, що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом даної доби перевищить 40000 кВт·год.
4. Середні витрати води в населеному пункті становлять 50000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрати води не перевищать 150000 л.
5. Майстерня обслуговує 100 комп'ютерів. Імовірність того, що кожний із 100 комп'ютерів витримає гарантійний термін роботи, становить 0,9. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що більше, ніж 85 і менше ніж 95 комп'ютерів витримають гарантійний термін роботи.
6. У касі ощадного банку є 4500 у.о. У черзі знаходиться 20 працівників. Сума X , яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною з математичним очікуванням, рівним 200 у.о. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 55$ у.о. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.
7. Ймовірність вчасної реалізації продукції дорівнює 0,4. Оцінити ймовірність того, що в 100 незалежно реалізованих одиницях продукції відхилення відносної частоти реалізації імовірності 0,4 за абсолютним значенням буде не менше від 0,1.
8. Ймовірність дозрівання кукурудзяного стебла з трьома качанами дорівнює 75%. Оцінити ймовірність того, що серед 3000 стебел частка з трьома качанами буде за абсолютною величиною відрізнятися від імовірності дозрівання такого стебла не більше, ніж на 0,02?
9. З 5000 електронних виробів було обстежено 500 шт., відібраних випадковим чином. Серед них виявилось 10 бракованих. Приймавши частку бракованих виробів серед відібраних за ймовірність виготовлення бракованого виробу, оцінити ймовірність того, що у всій партії виявиться бракованих виробів не менше 1% і не більше 3%.
10. Перевіряється партія комп'ютерів. З ймовірністю 0,01 комп'ютер може мати дефект у відеокарті і, незалежно від цього, з ймовірністю 0,02 – в оперативній пам'яті. В яких межах буде міститися практично достовірно число бракованих комп'ютерів в партії з 1000 штук, якщо за ймовірність практичної достовірності приймаємо 0,997?
11. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність появи події A , яка полягає у тому, що випадкова величина X набуде значення, яке відрізнятиметься від математичного сподівання $M(X)$ на величину, що не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення. Чи зміниться відповідь, якщо відомо, що випадкова величина X має нормальний розподіл?

12. При виробництві дискет брак становить 1%. Скільки дискет потрібно відібрати для перевірки якості, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що у випадковій вибірці дискет відсоток бракованих відрізняється від 1 % не більше як на 0,5 %?

13. При анонімному тестуванні виявилось, що 10% працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина X - кількість людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Зазначити межі, у які потрапляє випадкова величина X з ймовірністю 0,9.

14. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,3$, якщо $D(X) = 0,0025$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

15. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| > 0,1$, якщо $\sigma(X) = 0,4$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

16. Маса деталей, що виготовляються на верстаті, є випадковою величиною, середнє значення якої (математичне сподівання) дорівнює 1,2 кг. Дисперсія цієї величини дорівнює 0,012. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що:

а) відхилення маси деталі від її середнього значення за абсолютною величиною не перевищить 0,2;

б) маса деталі набуде значення від 1,18 до 1,22.

17. Прилад складається з 10 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента за певний час t дорівнює 0,05. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, які відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час t буде менше 2.

18. Із 1000 виробів навмання відібрано 200. Після перевірки серед них виявлено 15 бракованих. Приймавши частку бракованих виробів за ймовірність виготовлення браку, оцінити ймовірність того, що в усій партії бракованих виробів буде не більше 10 % і не менше 5 %.

19. У країні N проживає 50 млн людей. Тестування пройшли 1000 випадково відібраних громадян, серед яких виявилось 20 з ознакою X . Приймавши частку людей з ознакою X з дослідженої групи за ймовірність того, що випадково обраний громадянин країни N має таку ознаку, оцінити ймовірність того, що в даній країні відсоток осіб з ознакою X становить не більше 3 % і не менше 1 %.

20. Скільки виробів необхідно відібрати для перевірки якості продукції, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що частка бракованих деталей відрізняється від імовірності $p = 0,1$ випуску бракованої деталі не більше, ніж на 0,02?

21. При виробництві поліетиленових пакетів брак становить 5%. Скільки виробів потрібно відібрати для перевірки якості продукції, щоб з ймовірністю 0,9 можна було стверджувати, що частка бракованих пакетів становить від 4 до 6 %?

22. Випадкова величина X має такий закон розподілу:

X	3	5
PX	0,4	0,6

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що:

а) $|X - M(X)| < 0,2$;

б) $|X - M(X)| < 2$.

Обчислити точні ймовірності цих подій.

23. Випадкова величина X має такий закон розподілу

X	1	5
PX	0,7	0,3

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

а) $|X - M(X)| < 1$;

б) $|X - M(X)| < 2$.

Обчислити точні ймовірності цих подій.

24. Оцінити $P(|X - M(X)| < 0,3)$ за умови, що $\sigma(x) = 0,05$.

25. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| > 0,1$ при $\sigma(X) = 0,05$ і X - нормально розподілена випадкова величина.

26. Річна виручка авіакомпанії від перевезення пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 200 млн. грн. і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 20 млн. грн. Знайти :

а) оцінку ймовірності того, що в наступному році авіакомпанія матиме виручку не менше за 220 млн. грн.;

б) оцінку ймовірності того, що виручка міститиметься в межах від 180 до 220 млн. грн.

27. Річна виручка авіакомпанії від перевезення пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 200 млн. грн. і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 20 млн. грн. Знайти, в яких межах з імовірністю не меншою за 0,95, можна очікувати виручку в наступному році.

28. Імовірність виходу з ладу виробу за час випробувань на надійність $p=0,05$. Яка імовірність того, що за час іспитів 100 виробів вийдуть з ладу: а) не менш 4 виробів; б) менш 4 виробів?

29. Імовірність виходу з ладу виробу за час випробувань на надійність $p=0,05$. Яка імовірність того, що за час іспитів 100 виробів вийдуть з ладу: а) від 10 до 20 виробів; б) рівно 5 виробів?

30. Підручник надруковано тиражем 100000 екземплярів. Імовірність невірної брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти імовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дисперсія випадкової величини X – тижневого прибутку підприємства дорівнює 0,01 тис. у.о. Яка ймовірність того, що випадкова величина X відрізняється від її математичного очікування $M(X)$ більше, ніж на 0,2 у.о.?

а) 0,25; б) 0,025; в) 0,0025; г) 0,00025.

2. Щотижневе середнє значення витрат води в населеному пункті дорівнює 85000 л. Визначити ймовірність того, що витрати води в цьому населеному пункті протягом даного тижня перевищать 200000 л.

а) $\leq 0,0425$; б) $\leq 0,425$; в) $\leq 0,25$; г) $\leq 0,5$.

3. Визначити необхідне число дослідів, які необхідно провести, щоб відхилення частоти появи події A від ймовірності її появи в окремому досліді, що дорівнює 0,75, не перевищувало за абсолютною величиною 0,05 з ймовірністю 0,96?

а) ≥ 1875 ; б) ≥ 17785 ; в) ≤ 1875 ; г) ≤ 17785 .

4. Електрична підстанція обслуговує мережу з 20 ламп. Ймовірність включення кожної з них ввечері дорівнює 0,8. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом включених ввечері ламп менше трьох.

а) $\geq 0,64$; б) $\geq 0,46$; в) $\leq 0,64$; г) $\leq 0,46$.

5. Середня місячна зарплата X працівників підприємства підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $a=500$ у.о. і $\sigma=100$ у.о. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність події $|X - a| < 3\sigma$.

а) $\geq 0,98$; б) $\geq 0,80$; в) $\geq 0,88$; г) $\geq 0,90$.

4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Під час оцінювання знань та вмінь здобувачів вищої освіти з дисципліни «Вища та прикладна математика» використовується поточний та підсумковий контроль. Поточний контроль знань включає оцінювання на практичних заняттях та виконання самостійної роботи:

І семестр

1. За кожне практичне заняття – 4 бали

(21 заняття*4 бали) = 84 бали.

2. Самостійна робота студента оцінюється у 16 балів.

Разом за І семестр – 100 балів.

На практичному занятті оцінюється:

- а) усі відповіді здобувача вищої освіти – 1 бал;
- б) письмове виконання індивідуального завдання – 1 бал;
- в) швидкість та правильність виконання розрахунків при розв'язуванні завдань – 2 бали.

Підсумковий контроль – екзамен.

II семестр

1. За кожне практичне заняття – 4 бали

(17 занять*4 бали) = 68 балів.

2. Самостійна робота студента оцінюється у 32 бали.

Разом за II семестр – 100 балів.

На практичному занятті оцінюється:

- а) усі відповіді здобувача вищої освіти – 1 бал;
- б) письмове виконання індивідуального завдання – 1 бал;
- в) швидкість та правильність виконання розрахунків при розв'язуванні завдань – 2 бали.

Підсумковий контроль – екзамен.

Якщо здобувач вищої освіти набрав 75 і більше балів, то екзамен може бути виставлений за результатами підсумкового контролю на момент проведення екзамену.

У разі, якщо здобувач вищої освіти бажає поліпшити свою оцінку, або не набрав 35-74 бали, він складає письмовий екзамен з усієї програми навчальної дисципліни. При цьому в підсумковій оцінці враховуються накопичені бали 1-20, за екзамен виставляється 80 балів.

5. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні:

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-те вид. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Барковський В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – 5-те вид. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
3. Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник / О. І. Бобик, Г. І. Берегова, Б. І. Копитко. – К. : Професіонал, 2007. – 560 с.
4. Вища математика у прикладах та задачах : навч. посібник. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. – 2-ге вид., допов. і доопр. – К. : Кондор, 2006. – 608 с. : іл.
5. Вища та прикладна математика : методичні вказівки та ситуаційні завдання до самостійної роботи : освіт.-кваліф. рівень «бакалавр» : всі напрями підготовки / авт. О. В. Іващук. – Вінниця : Центр підготовки наукових та навчально-методичних видань ВТЕІ КНТЕУ, 2014. – 58 с.
6. Вища та прикладна математика : практикум / авт. В. О. Борисейко, В. І. Денисенко, Ю. Ф. Діденко. – К. : КНТЕУ, 2014. – 134 с.
7. Вища та прикладна математика : практикум / авт.: В. О. Борисейко, В. І. Денисенко, Ю. Ф. Діденко. – Київ : КНТЕУ, 2016. – 134 с.
8. Вища та прикладна математика : практикум : практикум / авт.: Л. З. Мащенко, С. В. Білоусова, Ю. А. Гладка, Т. В. Ковальчук, Л. М. Яницька. – Київ : КНТЕУ, 2012. – 204 с.
9. Грищенко В. О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум : навч. посібник / В. О. Грищенко. – К. : КНТЕУ, 2002. – 164 с.
10. Гулівата І. О. Вища та прикладна математика. Теорія ймовірностей : ситуаційні завдання до практичних занять : освіт. ступінь «бакалавр» : галузь знань «Соц. та повед. науки», «Управл. та адмініструв.», «Виробництво та технології», «Сфера обслугов.» : спец. «Економіка», «Облік і оподаткув.», «Фінанси, банк. справа та страхув.», «Менеджм.», «Маркетинг» / І. О. Гулівата. – Вінниця : Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2017. – 61 с.
11. Гусак Л. П. Вища та прикладна математика : методичні рекомендації до самостійної роботи : освіт. ступінь «бакалавр» : для всіх спеціальностей / Л. П. Гусак. – Вінниця : Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2016. – 47 с.
12. Жильцов О. Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій : навч. посібник / О. Б. Жильцов, Г. М. Торбін. – К. : МАУП, 2002. – 408 с. : іл.
13. Збірник задач з вищої математики. Ч.2 / Укл. Мартиненко В.С. та ін. – К. : КНТЕУ, 2001. – 220 с.
14. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посібник / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.

15. Карташова С. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум : навч. посібник / С. С. Карташова, В. В. Рязанцева. – К. : КНТЕУ, 2011. – 240 с.
16. Кленко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник / В. Ю. Кленко, В. Л. Голець. – 2-ге вид. – Київ : Центр учбової літератури, 2017. – 594 с.
17. Ковальчук Т. В. Вища математика для економістів : підручник. Ч. 1 / Т. В. Ковальчук, В. С. Мартиненко. – К. : КНТЕУ, 2014. – 395 с.
18. Ковальчук Т. В. Вища математика для економістів : підручник. Ч. 2 / Т. В. Ковальчук, В. С. Мартиненко, В. І. Денисенко. – К. : КНТЕУ, 2014. – 342 с.
19. Литвин І. І. Вища математика : навч. посібник / І. І. Литвин, О. М. Конончук, Г. О. Желізняк. – 2-ге вид. – Київ : Центр учбової літератури, 2017. – 368 с. + Електронна копія.
20. Математика для економістів. Збірник задач : навч. посібник / [С.В. Білоусова, В. О. Борисейко, Ю. А. Гладка, В. І. Денисенко, Ю. Ф. Діденко, Т. В. Ковальчук, Л. З. Мащенко]. – К. : КНТЕУ, 2015. – 504 с.
21. Панасенко О.Б. "Лекції з лінійної алгебри" - навчальний посібник - 2015, ТОВ "Нілан ЛТД", 222 с.: <http://amnm.vspu.edu.ua/wp-content/uploads/2016/10/Panasenko-lin-alg.pdf>
22. Практикум з вищої математики : навч. посібник / Т. В. Блудова, І. Ф. Греджук, І. А. Джалладова та ін. – К. : КНТЕУ, 2006. – 404 с.
23. Руденко В. М. Математична статистика : навч. посібник / В. М. Руденко. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.
24. Руденко В.М. Математична статистика : навч. посібник / В. М. Руденко. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.
25. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / П. С. Сеньо. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.

Додаткові:

26. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с. – (Альма-матер).
27. Валєєв К. Г. Вища математика для економістів : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, С. В. Дегтяр. – К. : Знання, 2011. – 287 с.
28. Вища математика у прикладах та задачах : навч. посібник. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеева та ін. – 2-ге вид., допов. і доопр. – К. : Кондор, 2006. – 460 с. : іл.
29. Шапкин А. С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями : учеб. пособие / А. С. Шапкин. – 4-е изд. – М. : Дашков и Ко, 2007. – 432 с.

Internet-ресурси

30. <http://www.math-pr.com>
31. <http://wood.mendelu.cz/math>
32. <http://matrixcalc.org>

Зміст

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ.....	3
2. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА».....	4
3. ТЕМАТИКА ТА КОНКРЕТНИЙ ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ.....	6
4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ.....	172
5. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	173

Гусак Л.П., Гулівата І.О.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Редактор: Фатєєва Т. Д.
Комп'ютерна верстка: Тертична Я. М.

Підп. до друку 29.10.2018 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 10,23.
Обл.-вид. арк.4,85 Тираж 300. Зам. № 492

Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ
21000, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 25