КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВІННИЦЬКИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ ІНСТИТУТ

СИСТЕМА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ
Сертифікована на відповідність ДСТУ ISO 9001:2015 (ISO 9001:2015, IDT)

Кафедра економічної кібернетики та інформаційних систем

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ / MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC PROCESSES

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Ступінь вищої освіти	«молодший бакалавр» /	junior bachelor
Галузь знань	12 «Інформаційні технології»/	Information technologies
Спеціальність	126 «Інформаційні системи та технології» /	Information systems and technologies
Освітня програма	«Інформаційні технології у бізнесі» /	Information technologies in business

Вінниця 2021

Розробник: Радзіховська Лариса, кандидат педагогічних наук, доцент

Обговорено та схвалено на засіданні кафедри економічної кібернетики та інформаційних систем 18.10.21 пр. № 11; на засіданні методичної комісії факультету економіки, менеджменту та права 25.10.2021, протокол № 8.

Рецензент: Мерінова Світлана, кандидат економічних наук, доцент

Редактор: Фатєєва Т.
Комп'ютерна верстка: Шуляк Н.

Підп. до друку 08.11.2021 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний
Друк ксероксний. Ум. друк. арк. 3,02.
Обл.-вид. арк.2,25. Тираж 5. Зам. № 411.

Редакційно-видавничий відділ ВТЕІ КНТЕУ
21000, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 25

1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дисципліна «Математичне моделювання економічних процесів» є фундаментальною наукою, яка заснована на економіко-математичних методах і яка, з використанням сучасних інформаційних технологій, дозволяє встановлювати кількісний зв'язок між економічними чинниками з метою прогнозування та аналізу економічної ситуації. Вона дає змогу здобувачам вищої освіти отримати знання про актуальні, за умов ринкової реформації, економіко-математичні моделі, їх структуру та методи визначення параметрів. Здобувачі вищої освіти набувають навичок складання економіко-математичних моделей, оцінювання параметрів та їх значущості.

Мета дисципліни: формування у майбутніх молодших бакалаврів сучасного економічного мислення та спеціальних знань, які можуть бути використані на практиці для прогнозування та уточнення економічної теорії, аналізу економічних систем, їх функціонування в реальних умовах, знаходження прогнозних оцінок з використанням сучасних інформаційних технологій та вироблення на їх основі управлінських рішень.

Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої освіти з дисципліни «Математичне моделювання економічних процесів» розроблені для освітнього ступеня «молодший бакалавр» галузей знань 12 «Інформаційні технології».

Методичні рекомендації до самостійної роботи мають теоретичний та прикладний виміри, спрямовані на поглиблене самостійне оволодіння теоретичних відомостей та можуть бути використані для виконання лабораторних завдань як під час аудиторних занять, так і при виконанні самостійній роботі.

Дане видання призначене для всебічної допомоги при опануванні здобувачами питань, які винесені на самостійне опрацювання.

Для зручності користування наведені методичні рекомендації по вивченню конкретних тем, допоміжні матеріали для опанування питань, які виносяться на самостійне опрацювання, рекомендовані джерела, перелік індивідуальних завдань. Для закріплення самостійно опрацьованого матеріалу здобувач вищої освіти може використати питання для самоконтролю, які запропоновані після кожної теми.

Практична реалізація запропонованих завдань сприятиме підготовці майбутніх фахівців до вирішення низки актуальних завдань у сфері економіки.

Крім регулярної самостійної роботи при вивченні поточних тем теоретичного курсу передбачаються наступні види самостійної роботи: підготовка здобувачів до проведення лабораторних занять та їх захисту, яка включає в себе виконання домашніх завдань, ознайомлення з методиками експериментів; виконання індивідуальних завдань, оформлення звітів; виконання домашніх завдань і розв'язування задач, що пропонуються викладачем; підготовка рефератів.

Докладні критерії оцінювання самостійної роботи та засоби проведення підсумкового контролю наведені у розділі 4.

2. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНТХ ПРОЦЕСІВ» для здобувачів освітнього ступеня «молодший бакалавр» галузі знань 12 «Інформаційні технології»

Назва теми	Кількість годин				Форма контролю
	Всього годин / кредитів	з них			
		Лекції	Лабораторні заняття	Самостійна робота студентів	
II семестр					
Тема 1. Предмет, об'єкт, мета дисципліни	6	2		4	Р, Т
Тема 2. Однофакторна економетрична модель	11	2	4	5	ПО
Тема 3. Багатофакторна лінійна регресійна модель	11	2	4	5	ІЗ
Тема 4. Кореляційно-регресійний аналіз	11	2	4	5	УО
Тема 5. Побудова економетричної моделі з автокорельованими лишками	9	2	2	5	ІЗ
Тема 6. Мультиколінеарність	11	2	4	5	ПО
Тема 7. Гетероскедастичність та її наслідки	9	2	2	5	Т
Тема 8. Предмет, сфери застосування математичного програмування в економіці	7	2		5	Р, УО
Тема 9. Побудова математичних моделей економічних процесів та явищ	11	2	4	5	ПО
Тема 10. Графічне розв'язання задач лінійного програмування	11	2	4	5	ІЗ
Тема 11. Основи аналізу моделей на чутливість	7	2		5	УО
Тема 12.Симплекс-метод. **12.1** Логічний симплекс метод	9	2	2	5	ПО
Тема 12. Симплекс-метод **12.2** Табличний симплекс-метод	9	2	2	5	ІЗ
Тема 12. Симплекс-метод **12.3** Метод штучного базису	9	2	2	5	ПО
Тема 13. Двоїстість в задачах математичного програмування	9	2	2	5	УО
Тема 14. Транспортна задача **14.1** Методи побудови опорного плану транспортної задачі	9	2	2	5	КТ
Тема 14. Транспортна задача **14.2** Метод потенціалів	9	2	2	5	ПО
Тема 15. Задачі нелінійного опуклого програмування	9	2	2	5	ПО
Тема 16. Модель міжгалузевого балансу	13	2	6	5	ІЗ
Разом за навчальний рік:	**180/6**	**38**	**48**	**94**	
Підсумковий контроль знань	**Екзамен**				

Умовні позначення: УО – усне опитування, Т – тестування з певної теми (розділу), ІЗ - індивідуальне завдання, Р – реферативне повідомлення, КТ − комп'ютерне тестування.

3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ КОНКРЕТНИХ ТЕМ

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ, ОБ'ЄКТ, МЕТА ДИСЦИПЛІНИ

Дисципліна «Математичне моделювання економічних процесів» є фундаментальною наукою, яка заснована на економіко-математичних методах і яка, з використанням сучасної електронно-обчислювальної техніки, дозволяє встановлювати кількісний зв'язок між економічними чинниками з метою прогнозування та аналізу економічної ситуації.

Мета дисципліни: формування сучасного економічного мислення та спеціальних знань, які можуть бути використані на практиці для прогнозування та уточнення економічної теорії з точки зору системного та процесного аналізу і підходу – аналізу економічних систем, їх функціонування в реальних умовах, знаходження прогнозних оцінок за допомогою певних обчислювальних алгоритмів та вироблення на їх основі управлінських рішень.

Предмет навчальної дисципліни включає в себе розгляд та вивчення особливостей застосування математичного апарату для побудови і дослідження моделей, що описують функціонування як окремих виробничих підприємств, так і великих економічних одиниць (таких як економіка регіону, країни, світу). З позиції системності розглядається проблематика поєднання в рамках єдиної моделі економічної системи виробничої сфери, сфери споживання та ринкових відносин. Також вивчаються характерні особливості системних економіко-математичних моделей.

Дисципліна «Математичне моделювання економічних процесів» включає дві основні складові: економетрію та математимчне програмування.

Математичне програмування відповідає англійському терміну «mathematical programming» що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети.

Типова постановка задачі математичного програмування полягає в наступному: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів (програм) вибрати найкращий (оптимальний).

Спеціалісти, які працюють в області математичного програмування, займаються розробкою та використанням методів відшукання екстремальних значень цільової функції, на аргументи якої накладені обмеження. У залежності від властивостей цільових функцій, математичне програмування можна поділити на ряд самостійних дисциплін, де вивчають та розробляють методи розв'язання визначених класів задач.

Насамперед задачі математичного програмування поділяються на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому, якщо цільова функція і обмеження лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна з зазначених функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Найбільш вивченим розділом математичного програмування є лінійне програмування. Для ров'язування задач лінійного програмування розроблений цілий ряд ефективних методів, алгоритмів і програм.

Методи математичного програмування використовуються в економічних, організаційних, військових і ін. системах для розв'язання різних задач, однією із яких є так звані розподільні задачі. Розподільні задачі виникають у випадку, коли ресурсів, що є в наявності, не вистачає для ефективного виконання кожної з намічених робіт і необхідно щонайкраще розподілити ці наявні ресурси відповідно до обраного критерію оптимальності.

В процесі розв'язання екстремальної економічної задачі виконуються наступні пункти: будується економіко-математична модель, шукається оптимальний план, проводиться економічний аналіз отриманих результатів і визначається можливість їх практичного застосування.

Економетрія – теоретико-прикладна економічна дисципліна, що являє собою методологію моделювання економічних систем будь-якої складності, рівня організації та управління.

Дисципліна «Економетрія» дає змогу отримати знання про актуальні, за умов ринкової реформації, економетричні моделі, їх структуру та методи визначення параметрів.

Економетрія — це порівняно новий напрямок економічної науки, що утворився від поєднання теоретичної економіки, математики та статистики. Слово "економетрія" (у деяких джерелах "економетрика") буквально означає "вимірювання в економіці", що дає підстави під цим терміном розуміти все, що пов'язано з вимірюваннями в економіці. Однак таке тлумачення надзвичайно широке і не відображає особливостей цієї галузі знань.

Тому точнішим є таке визначення: економетрія — це самостійна наукова дисципліна, яка об'єднує сукупність теоретичних результатів, засобів, прийомів, методів і моделей, призначених для того, щоб на базі економічної теорії, економічної статистики та математико-статистичного інструментарію надавати конкретних кількісних значень загальним (якісним) закономірностям, обгрунтованим економічною теорією.

Об'єктом економетрії є економічні системи та простори різного рівня складності: від окремого підприємства чи фірми до економіки галузей, регіонів, держави й світу загалом. Предмет економетрії — це методи побудови та дослідження математико-статистичних моделей економіки, проведення кількісних досліджень економічних явищ, пояснення та прогнозування розвитку економічних процесів. Метою економетричного дослідження є аналіз реальних економічних систем і процесів, що в них відбуваються, за допомогою економетричних методів і моделей, їх застосування при прийнятті науково обгрунтованих управлінських рішень. Основне завдання економетрії — оцінити параметри моделей з урахуванням особливостей вхідної економічної інформації, перевірити відповідність моделей досліджуваному явищу і спрогнозувати розвиток економічних процесів.

Процес економетричного моделювання складається з таких кроків:

1) вибір конкретної форми аналітичної залежності між економічними показниками (специфікація моделі) на підставі відповідної економічної теорії; 2) збирання та підготовка статистичної інформації; 3) оцінювання параметрів моделей; 4) перевірка адекватності моделі та достовірності її параметрів; 5) застосування моделі для прогнозування розвитку економічних процесів

На рівні макроекономіки економетричними засобами досліджують закономірності у виробництві, розподілі, перерозподілі та кінцевому використанні валового внутрішнього продукту, у яких суттєву роль відіграють державний бюджет, податкова політика, страхування, кредит, ощадна справа.

На мікрорівні економетричні дослідження передбачають наукове обгрунтування управлінських рішень, що приймаються на підприємствах різних форм власності й маютьураховувати постійний вплив зовнішнього середовища.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Сфери застосування математичного та комп’ютерного моделювання.
2. Особливості застосування математичного та комп’ютерного моделювання.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 20.
Додаткові: 2, 5, 8, 13, 15, 19.
Інтернет-ресурси: 1, 2, 3.

II. Перелік індивідуальних завдань

Визначити основні сфери застосування математичного моделювання.
Окреслити особливості застосування комп'ютерного моделювання.

III. Питання для самоконтролю

1. Що вивчає дисципліна «Економіко-математичне моделювання» ?
2. Назвіть складові дисципліни та охарактеризуйте їх.
3. На які два види поділяються задачі математичного програмування ? Які з них найбільше вивчені ?
4. Що є об'єктом економетрії ?
5. З яких кроків складається процес економетричного моделювання ?

ТЕМА 2. ОДНОФАКТОРНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

Величини X та Y знаходяться у функціональній залежності, якщо кожному допустимому значенню X відповідає певне значення Y. Функціональна залежність проявляється для кожного окремого випадку. Наприклад, вартість продукції при постійній ціні залежить від її кількості; шлях, який проходить тіло, залежить від його швидкості і часу. Знання функціональної залежності дозволяє абсолютно точно прогнозувати різні процеси.

Однак, на практиці між величинами існують такі зв'язки, коли вказаної залежності не можна встановити, хоча взаємодія між величинами існує. Так, наприклад, собівартість одиниці продукції залежить від продуктивності праці, кількості валової продукції і т. і.

Такого типу зв'язки називаються статистичними.

Обмежимося, поки що, зв'язками між двома величинами. Статистичну залежність між груповими середніми однієї ознаки Y і відповідними значеннями другої ознаки X називають кореляційною залежністю (correlation – співвідношення (англ.)). Кореляційна залежність проявляється тільки в масі спостережень і в середньому.

Визначення форми зв'язку: визначити форму зв'язку – означає виявити механізм одержання залежної випадкової змінної. При вивченні статистичних залежностей форму зв'язку можна характеризувати функцією регресії (лінійною, квадратичною, показниковою і т.д.).

Кількісний зв'язок між змінною у, що характеризує результативну ознаку, і незалежною змінною х, що характеризує найбільш важливий чинник, дає однофакторна економетрична модель. Загальний вигляд такої моделі: y=f(x;e), де e – стохастична складова (залишки, відхилення) моделі.

Аналітична форма економетричної моделі залежить від економетричної сутності зв'язків.

В економічній практиці найбільш поширеними є такі форми аналітичних залежностей: лінійна, експоненціальна, степенева, гіперболічна.

Якщо вигляд функції знайдено, тоді переходять до другого етапу − визначення невідомих параметрів цієї функції. Згідно з методом найменших квадратів за невідомі параметри вибирають такі числа, щоб сума квадратів відхилень теоретичних значень та відповідних дослідних була найменшою.

Регресійна модель називається лінійною, якщо вона лінійна за своїми параметрами.

Якщо між х і у існує квадратична залежність $y=ax^2+вx+c$, то значення параметрів а, в, с знаходять, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Приклад. Припускаючи, що між заданими значеннями х та у існує квадратична завлежність, знайти параметри емпіричної функції за методом найменших квадратів.

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Розв'язання. Складемо допоміжну розрахункову таблицю.

к	$x_к$	$x_к^2$	$x_к^3$	$x_к^4$	$y_к$	$x_к y_к$	$x_к^2 y_к$
1	7	49	343	2401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10000	9,4	94	940
5	11	121	1331	14641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1728	20736	9,5	114	1368
7	13	168	2197	28561	9,4	122,2	1588,6
Сума	70	728	7840	87096	62,7	635,6	6683,4

Запишемо систему рівнянь для невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 728a + 70в + 7c = 62{,}7, \\ 7840a + 728в + 70c = 635{,}6, \\ 87096a + 7849в + 728c = 6683{,}4. \end{cases}$$

Розв'язавши систем, отримаємо: а=-0,04, в=1,1, с=2,12.

Таким чином, шукана квалратична функція має вигляд:

$y=-0{,}04x^2+1{,}1x+2{,}12$.

І. Питання до самостійного вивчення

1. Визначення набору змінних для економетричної моделі.
2. Які методи застосовуються для оцінювання параметрів класичної регресійної моделі ?

Рекомендовані джерела:

Основні: 6, 10, 11,12, 15, 17.

Додаткові: 2, 3, 5, 7, 9, 18, 21.

Інтернет-ресурси: 1, 2.

ІІ. Перелік індивідуальних завдань

За допомогою нанесення точок (x;y) у декартовій системі координат визначити можливий тип статистичної залежності і методом найменших квадратів обчислити її невідомі параметри.

1.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6,4	14,1	18,4	19,9	18,6	14,1	6,6

2.

x	1	2	3	5	6	8	9
y	15,4	22,9	27,4	27,6	22,9	4,9	8,4

3.

x	1	3	4	5	7	9	10
y	11,5	17,5	19,1	19,6	17,6	14,9	11,4

4.

x	2	3	4	5	6	7	9
y	12,1	14,5	15,9	16,4	16,1	14,4	8,5

5.

x	1	2	4	5	6	8
y	16,5	23,9	30,1	28,4	24,1	5,9

ІІІ. Питання для самоконтролю

1. Які особливості економетричних моделей ?
2. Наведіть кілька прикладів економетричних моделей.
3. У чому суть методу найменших квадратів ?

ТЕМА 3. БАГАТОФАКТОРНА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЙНА МОДЕЛЬ

Економетричні моделі, як особливий клас математичних моделей, використовуються для дослідження, аналізу і прогнозів різного рівня економічних систем.

При вирішенні задачі використаємо лінійну багатофакторну модель, для розрахунку параметрів якої застосуємо метод найменших квадратів.

Для того, щоб знайти оцінки параметрів ***B***, запишемо вибіркову регресійну багатофакторну модель

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_n X_n + \varepsilon_i \qquad (1),$$

яка має такий матричний вигляд: $Y = BX + E$ (2),

де ***B*** – вектор-стовпець параметрів, оцінених за МНК;

E – вектор-стовпець помилок (залишків, похибок).

Для того, щоб застосувати метод найменших квадратів, припустимо, що виконуються такі умови:

– математичне сподівання залишків, тобто середня величина випадкових значень, дорівнює нулю;

– залишки мають нормальний закон розподілу;

– значення похибок ε_i в матриці залишків E_i для різних „*i*” незалежні між собою і мають постійну дисперсію σ^2;

– незалежні змінні моделі статистично не пов’язані із залишками;

– незалежні змінні не повинні бути мультиколінеарними, тобто ці змінні незалежні між собою.

Якщо ці умови виконуються, то оцінки параметрів вектора ***B*** мають бути незміщені, обґрунтовані та ефективні.

Висунемо гіпотезу про існування лінійного зв'язку між ***Y*** та X_1, X_2. Тоді рівняння (1) перепишеться у вигляді: $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_i$. Дана гіпотеза у матричній формі буде мати вигляд рівняння (2), де ***B*** – вектор-стовпець параметрів, оцінених за МНК, розміром 3×1 при двофакторній моделі;

X – матриця, розміром $n\times 3$ при двофакторній моделі;

E – вектор-стовпець помилок (залишків), розміром 3×1.

Вектор невідомих параметрів ми знаходимо за допомогою МНК, мінімізуючи суму квадратів залишків. Тоді

$$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad (3).$$

Вираз (3) є основним результатом процедури оцінювання параметрів моделі за допомогою МНК.

Прикладам нелінійної регресійної моделі може служити виробнича функція Кобба-Дугласа.

І. Питання до самостійного вивчення

1. Степенева нелінійна регресійна модель.
2. Дослідження нелінійних регресійних моделей.

Рекомендовані джерела:

Основні: 6, 10, 11, 12, 15, 17.

Додаткові: 5, 7, 9, 18, 21.

ІІ. Перелік індивідуальних завдань

Навести приклад використання нелінійної регресійної моделі в економіці. Дослідити запропоновану модель

ІІІ. Питання для самоконтролю

1. Які умови мають виконуватись, щоб можна було застосовувати метод найменших квадратів ?
2. Який вигляд має багатофакторна лінійна регресійна модель ?
3. Які Вам відомі нелінійні регресійні моделі ?

ТЕМА 4. КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Економічні дані являють собою кількісні характеристики будь-яких економічних об'єктів чи процесів. Вони формуються під дією багатьох факторів, не всі з яких доступні зовнішньому контролю.

Неконтрольовані фактори можуть приймати випадкові значення з деякої множини значень і тим самим обумовлювати випадковість даних, які вони визначають. Стохастична (ймовірнісна) природа економічних даних обумовлює необхідність застосування відповідних статистичних методів для їх обробки і аналізу.

Дослідження показують, що варіація кожної ознаки, що вивчається, знаходиться в тісному зв'язку і взаємодії з варіацією інших ознак, що характеризують досліджувану сукупність одиниць. Наприклад, варіація рівня продуктивності праці залежить від ступеня досконалості обладнання, що використовується, технології, організації виробництва, управління і інших факторів.

Основна задача кореляційного аналізу полягає у виявленні взаємозв'язку між випадковими змінними шляхом оцінки парних (частинних) коефіцієнтів кореляції, обчислення і перевірки значимості множинних коефіцієнтів кореляції і детермінації. Крім того, за допомогою кореляційного аналізу вирішуються наступні задачі: відбір факторів, які найбільше впливають на результативну ознаку, на основі оцінки тісноти зв'язку; виявлення раніше невідомих причинних зв'язків. Кореляція безпосередньо не виявляє причинних зв'язків між параметрами, але встановлює чисельне значення цих зв'язків.

При проведенні кореляційного аналізу вся сукупність даних розглядається як множина змінних факторів, кожна з яких містить n спостережень. При вивченні взаємозв'язку між двома факторами їх, як правило, позначають $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Коваріація – це статистична міра взаємодії двох змінних. Наприклад, позитивне значення коваріації доходності двох цінних паперів показує, що доходність цих цінних паперів має тенденцію змінюватися в одну сторону.

Коваріація між двома змінними X і Y розраховується наступним способом:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \qquad (4)$$

де $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$ – фактичні значення змінних X і Y,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (5),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (6).$$

Коваріація залежить від одиниць, в яких вимірюються змінні X і Y, вона являється ненормованою величиною. Тому для вимірювання сили зв'язку між двома змінними використовується інша статистична характеристика, яка називається коефіцієнтом кореляції.

Коефіцієнт парної кореляції

Для двох змінних X і Y *коефіцієнт парної кореляції* розраховується наступним чином:

$$r_{y,x} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \qquad (7)$$

де σ_x^2, σ_y^2 – оцінки дисперсії величин X і Y. Ці оцінки характеризують ступінь розсіювання значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) навколо свого середнього $\bar{x}$ ($\bar{y}$ відповідно).

Коефіцієнт кореляції характеризує тісноту або силу зв'язку між змінними y і x. Значення коефіцієнта кореляції перебуває в межах від –1 до +1. При позитивному значенні r_{xy} має місце позитивна кореляція, тобто із збільшенням (зменшенням) значень однієї змінної (x) значення іншої (y) відповідно збільшується (зменшується). При негативному значенні r_{xy} має місце негативна кореляція, тобто із збільшенням (зменшенням) значень x значення y відповідно зменшуються (збільшуються).

Дисперсія (оцінка дисперсії) визначається за формулою:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (8).$$

В загальному випадку для отримання незміщеної оцінки дисперсії суму квадратів слід ділити на число ступенів свободи оцінки (n-p), де n – об'єм вибірки, p – число накладених на вибірку зв'язків. Так, як вибірка уже використовувалась один раз для визначення середнього X, то число накладених зв'язків в даному випадку дорівнює одиниці ($p=1$), а число степенів свободи оцінки дорівнює ($n-1$).

Найбільш природно оцінювати ступінь розсіювання значень змінних в тих самих одиницях, в яких вимірюється сама змінна. Цю задачу вирішує показник, який називається середньоквадратичним відхиленням (стандартним відхиленням) змінної X (змінної Y), який визначається відношенням:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \qquad (9).$$

Кореляція і коваріація представляють, по суті, одну і ту ж інформацію, однак кореляція представляє цю інформацію у більш зручній формі.

Для якісної оцінки коефіцієнта кореляції використовують різні шкали, найчастіше – шкалу Чеддока. В залежності від значення коефіцієнта кореляції зв'язок може мати одну із оцінок:

0,1 – 0,3 – слабкий;
0,3 – 0,5 – помітний;
0,5 – 0,7 – помірний;
0,7 – 0,9 – високий;
0,9 – 1,0 – дуже високий.

Потрібно відмітити, що величина коефіцієнта кореляції не є доказом того, що між ознаками, які ми досліджуємо, існує причинно-наслідковий зв'язок, а являє собою оцінку ступеня взаємної узгодженості в зміні ознак. Для того, щоб встановити причинно-наслідковий зв'язок, необхідний аналіз якісної природи явищ. Так як оцінка тісноти зв'язку за допомого коефіцієнта кореляції проводиться, як правило, на основі обмеженої інформації про явище, яке вивчається, то виникає питання: наскільки є правомірними наші висновки по вибірковим даним про наявність кореляційного зв'язку в тій генеральній сукупності, з якої була зроблена дана вибірка.

В зв'язку з цим виникає необхідність оцінки значущості лінійного коефіцієнта кореляції, яка дає можливість розповсюдити результати вибірки на генеральну сукупність. В залежності від об'єму вибірки пропонуються різні методи оцінки значущості лінійного коефіцієнта кореляції.

Оцінка значущості коефіцієнта кореляції при малих об'ємах вибірки проводиться з використанням t-критерію Стьюдента. При цьому фактичне значення цього критерію визначається за формулою:

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r_{y,x}^2}{1 - r_{y,x}^2}(n-2)} \qquad (10).$$

Обчислене за цією формулою значення $t_{набл}$ порівнюється з критичним значенням t-критерію, яке береться із таблиці значень t-критерію Стьюдента з урахуванням заданого рівня значимості α і числа ступенів свободи ($n-2$).

Якщо $t_{набл} > t_{табл}$, то отримане значення коефіцієнта кореляції визнається значущим. Таким чином робиться висновок, що між досліджуваними змінними існує тісний статистичний взаємозв'язок.

Якщо значення $r_{y,x}$ близьке до нуля, то зв'язок між змінними слабкий. Якщо кореляцію між випадковими величинами:

- позитивна, то при зростанні однієї випадкової величини інша має тенденцію в середньому зростати;
- негативна, то при зростанні однієї випадкової величини інша має тенденцію в середньому спадати.

Зручним графічним засобом аналізу парних даних являється діаграма розсіювання, яка представляє кожне спостереження в площині двох вимірів, які відповідають двом факторам.

Діаграму розсіювання, на якій зображується сукупність значень двох ознак, називають ще кореляційним полем. Кожна точка цієї діаграми має координати x_i і y_i. По мірі того, як зростає сила лінійного зв'язку, точки на графіку будуть лежати більш близько до прямої лінії, а величина r_{yx} буде ближче до одиниці.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Оцінка значущості коефіцієнта кореляції.
2. Вбудовані функції MS Exel, які використовуються для розрахунку коефіцієнтів кореляції.

Рекомендовані джерела:

Основні: 6, 7, 10, 12, 19, .

Додаткові: 2, 6, 7, 9, 16, 18, 20.

II. Перелік індивідуальних завдань

По виробничому підприємству відомі такі показники за 6 періодів:

К (одиниць) − кількість виробленого та реалізованого продукту. Ц (грн. за одиницю продукції) − ціна реалізації. Знайти кореляційні залежності ціни Ц від кількості продукту К. Оцінити тісноту зв'язку між відповідними ознаками за коефіцієнтом кореляції та значущість отриманого коефіцієнта.

1.

Період	1	2	3	4	5	6
К	285	267	233	148	102	85
Ц	10	23	27	33	34	36

2.

Період	1	2	3	4	5	6
К	55	44	39	34	33	27
Ц	8	26	26	28	28	30

3.

Період	1	2	3	4	5	6
К	8	6	5,6	4,3	4	3
Ц	5	13	14	14	19	20

4.

Період	1	2	3	4	5	6
К	25	19	15	11	8	6
Ц	26	62	63	63	80	62

5.

Період	1	2	3	4	5	6
К	68	31	26	25	14	12
Ц	6	17	19	19	24	25

III. Питання для самоконтролю

1. Які існують типи зв'язків ?.
2. Які основні завдання кореляційного аналізу ?
3. Що таке кореляція та коваріація ?
4. В чому полягає проблема тісноти зв'язку ?

ТЕМА 5. ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ З АВТОКОРЕЛЬОВАНИМИ ЛИШКАМИ

Одним із припущень класичного регресійного аналізу є припущення про незалежність випадкових величин. Якщо це припущення порушується, то ми маємо справу з автокореляцією. Автокореляція – це взаємозв’язок послідовних елементів часового чи просторового ряду даних.

Розглянемо економетричну модель виду:

$$Y = XB + E ,$$

де **_Y_** – вектор залежної змінної;

_X_ – матриця незалежних змінних;

_B_ – вектор параметрів моделі;

_E_ – вектор помилок або залишків.

В регресійній моделі автокореляція наявна у разі, коли випадкові величини залежні між собою. Автокореляція залишків виникає найчастіше тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Провокувати автокореляцію може і неправильно специфікована функціональна залежність у регресійних моделях та лагові запізнення в економетричних процесах.

Найбільш відомим і поширеним тестом перевірки моделі на наявність кореляції між залишками є тест Дарбіна-Уотсона. На відміну від багатьох інших тестів, перевірка за тестом Дарбіна-Уотсона складається з декількох етапів і включає зони невизначеності. Розглянемо порядок тестування за критерієм Дарбіна–Уотсона:

1. На першому етапі розраховується значення *d*–статистики за формулою:

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} .$$

У теорії доведено, що значення d-статистики Дарбіна-Уотсона знаходяться в межах від 0 до 4.

2. Задаємо рівень значимості α та підрахуємо кількість факторів (k) у досліджуваній моделі. Припустимо, що $k=p$. За таблицею Дарбіна-Уотсона при заданому рівні значимості α, кількості факторів $k=p$ та кількості спостережень n, знаходимо два значення d_L та d_U. Якщо розраховане значення d-статистики знаходиться на проміжку $0 < d < d_L$, то це свідчить про наявність позитивної автокореляції. Якщо значення d потрапляє в зону невизначеності, тобто набуває значення $d_L \le d \le d_U$, або $4 - d_U \le d \le 4 - d_L$, то ми не можемо зробити висновки ні про наявність, ні про відсутність автокореляції. Якщо $4 - d_L < d < 4$, то маємо негативну автокореляцію. Нарешті, якщо $d_U < d < 4 - d_U$, то автокореляції немає. Всі ці випадки проілюстровані далі:

Для виявлення автокореляції залишків використовується також критерій фон Неймана:

$$Q = Q_{факт} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Звідси $Q = d \cdot \frac{n}{n-1}$. Отже, при $n \to \infty$ $Q = d$.

Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α та заданому числу спостережень: $Q_{табл} = Q_{(\alpha, n)}$.

Якщо $Q_{факт} < Q_{табл}$, то існує додатна автокореляція.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Додатна і від'ємна автокореляція.
2. Дослідження моделі на наявність автокореляції.

Рекомендовані джерела:

Основні: 7, 10, 11, 12, 15, 17, 19.
Додаткові: 2, 6, 7, 26, 9, 20, 21.

II. Перелік індивідуальних завдань

За даними таблиці побудувати економетричну модель, що характеризує залежність ціни товару від вартості основних матеріалів. Дослідити побудовану модель на наявність автокореляції за одним із відомих Вам тестів.

1.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ціна товару	12,5	12,7	13	13,3	15	16,2	16,6	17	17,3
Вартість матеріалу	7	7,2	7,6	7,7	8,3	9,4	9,5	10	10,1

2.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ціна товару	10,5	10,7	11	12,3	13	13,2	14	14,5	14,7
Вартість матеріалу	4	4,2	5,6	6,7	7,3	7,4	8,5	9	9,1

3.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ціна товару	14,5	14,8	15	15,4	15,9	16	16,3	16,9	17,1
Вартість матеріалу	5	5,3	6,3	6,7	7,2	8,4	8,5	9	9,6

4.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ціна товару	14,5	14,8	15	15,4	15,9	16	16,3	16,9	17,1
Вартість матеріалу	8	8,3	9,3	9,7	10,2	10,4	10,8	11,2	12

5.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ціна товару	14,6	14,9	15	15,5	15,8	16,1	16,3	16,7	17
Вартість матеріалу	2	2,5	3,3	3,6	4,1	4,4	5	5,3	5,6

ІІІ. Питання для самоконтролю

1. Що таке автокореляція ?
2. Які причини виникнення автокореляції залишків ?
3. Які Вам відомі тести перевірки моделі на наявність автокореляції ? Опишіть особливості кожного з тестів.

ТЕМА 6. МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

Термін „мультиколінеарність” означає, що в багатофакторній регресійній моделі дві або більше незалежних змінних (факторів) пов’язані між собою лінійною залежністю або, іншими словами, мають високий ступінь кореляції ($r_{x_i x_j} \to 1, i \neq j$). Мультиколінеарність негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі, або взагалі робить неможливою її побудову. Тому, будуючи економетричну модель, треба мати інформацію про те, що між незалежними змінними не існує мультиколінеарність.

Найбільш повне дослідження мультиколінеарності можна здійснити на основі застосування алгоритму Фаррара-Глобера. Цей алгоритм має три види статистичних критеріїв для виявлення мультиколінеарності:

- усього масиву незалежних змінних (критерій χ^2);
- кожної незалежної змінної з усіма іншими (F-критерій);
- кожної пари незалежних змінних (t-критерій).

Всі ці критерії при порівнянні з їх критичними значеннями дають можливість зробити конкретні висновки відносно наявності чи відсутності мультиколінеарності незалежних змінних. Опишемо цей алгоритм.

Складемо покроковий алгоритм Фаррара-Глобера.

1. Стандартизація (нормалізація) змінних $x_1, x_2, ..., x_m$ економетричної моделі, обчисливши

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

де n – кількість спостережень ($i=1, 2,..., n$);

m – кількість незалежних змінних ($j=1, 2,..., m$);

$\bar{x}_j$ – середнє арифметичне j-тої незалежної змінної;

$\sigma_{x_j}^2$ – дисперсія j-тої незалежної змінної.

2. Знаходження кореляційної матриці (матриці моментів стандартизованої системи нормальних рівнянь):

$$R = \left(X^*\right)^T X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & ... & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & ... & r_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_{m1} & r_{m2} & ... & 1 \end{pmatrix},$$

де X^* – матриця стандартизованих незалежних (пояснювальних) змінних;

$(X^*)^T$ – матриця, транспонована до матриці X^*.

3. Визначаємо значення критерію Пірсона χ^2:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right]\ln|R|,$$

де $|R|$ – визначник кореляційної матриці R.

Значення цього критерію порівнюється з даними статистичних таблиць при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях вільності і рівні значущості α (якщо $\chi^2_{факт} > \chi^2_{табл}$, то в масиві незалежних змінних існує мультиколінеарність).

4. Визначення оберненої матриці:

$$C = R^{-1} = \left(\left(X^*\right)^T X^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

5. Обчислення F-критеріїв Фішера:

$$F_k = \left(c_{kk} - 1\right)\frac{n-m}{m-1},$$

де c_{kk} – діагональні елементи матриці C. Фактичні значення критеріїв F_k порівнюються з табличними при $k_1 = (n-m)$ і $k_2 = (m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α (якщо $F_k > F_{табл}$, то відповідна k-та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими).

Обчислення коефіцієнта детермінації для кожної змінної:

$$R^2_{\det x(k)} = 1 - \frac{1}{c_{kk}}.$$

6. Знаходження часткових коефіцієнтів кореляції, які характеризують щільність зв’язку між двома змінними за умови, що інші змінні $x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lm}$ не впливають на цей зв'язок (існування парної мультиколінеарності):

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} c_{jj}}},$$

де c_{kj} – елемент матриці C, що міститься в k-му рядку і j-му стовпці ($k=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,m$);

c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці C.

7. Обчислення t-критеріїв Стьюдента:

$$t_{kj} = \left|r_{kj}\right| \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}.$$

Розраховані (фактичні) значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними при $(n-m)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $t_{kj} > t_{табл}$, то між незалежними змінними x_k і x_j існує мультиколінеарність.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Ознаки мультиколінеарності.
2. Наслідки мультиколінеарності.

Рекомендовані джерела:

Основні: 6, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 19.

Додаткові: 2, 3, 5, 7, 18, 20, 21.

II. Перелік індивідуальних завдань

Охарактеризувати основні ознаки мультиколінеарності, а саме як може вплинути мультиколінеарність на:

1. Парні коефіцієнти кореляції;
2. Значення визначника кореляційної матриці;
3. Частинні коефіцієнти детермінації;
4. Значення оцінок параметрів моделі при високому рівні коефіцієнта детермінації і F-критеріїв, які істотно відрізняються від 0.
5. Зміну оцінок параметрів моделі при додатковому введенні до останньої пояснювальної змінної.

Опишіть найважливіші наслідки мультиколінеарності.

III. Питання для самоконтролю

1. Що означає мультиколіарність змінних ?
2. Які статистичні критерії використовуються для визначення мультиколінеарності ?
3. Дайте коротку характеристику алгоритму алгоритму Фаррара-Глобера.

ТЕМА 7. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Економетричні моделі повинні задовольняти умови Гаусса-Маркова (класичні умови регресійного аналізу):

1. Регресійна модель лінійна по параметрах (коефіцієнтах), коректно специфікована і містить адитивний випадковий член.
2. Випадковий член має нульове середнє.
3. Усі пояснюючі змінні не корельовані з випадковим членом.
4. Значення випадкового члена, що спостерігаються, не корельовані один з одним.
5. Випадковий член має постійну дисперсію.
6. Жодна з пояснюючих змінних не є строгою лінійною функцією інших пояснюючих змінних.
7. Випадковий член розподілений нормально (необов'язкова, але часто використовувана умова).

Порушення умови про те, що випадковий член повинен мати постійну дисперсію, призводить до явища гетероскедастичності, а в протилежному випадку модель буде гомоскедастичною.

Найчастіше гетероскедастичність виникає в моделях, заснованих на перехресних вибірках, але зустрічається і в тимчасових рядах.

Види гетероскедастичності:

1. Явна гетероскедастичність (зумовлена зміною дисперсії випадкового члена, її залежністю від різних факторів).
2. Помилкова гетероскедастичність (спричиняється помилковою специфікацією моделі регресії).

Джерела гетероскедастичності:

1. Явна гетероскедастичність виникає в перехресних вибірках при залежності між дисперсією випадкової складової та значеннями незалежних змінних. Найбільш розповсюджений випадок явної гетероскедастичності, коли дисперсія зростає із зростанням одного із факторів.

2. Явна гетероскедастичність виникає також і в тимчасових рядах, коли залежна змінна має великий інтервал якісно неоднорідних значень або високий темп зміни.

3. Явна гетероскедастичність виникає в будь-якій моделі у випадку, якщо якість даних варіює всередині вибірки.

Наслідки гетероскедастичності:

1) оцінки коефіцієнтів залишаються незміщеними та лінійними;

2) оцінки не будуть ефективними (тобто вони не будуть мати найменшу дисперсію порівняно із іншими оцінками даного параметра). Збільшення дисперсії оцінок зменшує ймовірність отримання максимально точних оцінок;

3) дисперсії оцінок будуть розраховуватись із зміщенням;

4) внаслідок вищесказаного, всі висновки, які отримують на основі відповідних *t*- і *F*-статистик, а також інтервальні оцінки будуть ненадійними. Відповідно, статистичні висновки, які отримані при стандартних перевірках якості оцінок, можуть бути помилковими і призводять до неправильних висновків стосовно побудованої моделі. Можливо, що стандартні помилки коефіцієнтів будуть занижені, а відповідно, *t*-статистики будуть завищені. Це може призвести до визнання статистично значущими коефіцієнтів, які такими не є.

Параметричний тест Гольдфельда-Квандта

Імовірно, найбільш популярним формальним критерієм є критерій, запропонований С. Гольдфельдом і Р. Квандтом. Він застосовується при досить великій кількості спостережень (до великих вибірок) *n*, коли дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрату однієї із незалежних змінних моделі.

Тест полягає в оцінці двох лінійних моделей методом найменших квадратів. Перша модель буде будуватися на основі даних з найменшими значеннями регресійних залишків, друга – на основі даних з найбільшими значеннями залишків. Якщо значення залишків обох регресій приблизно однакові, то приймається гіпотеза про гомоскедастичність. У протилежному випадку можна вважати, що в моделі присутня гетероскедастичність.

<u>Тест складається з наступних дій</u>:

1. Розташувати вихідні дані в порядку зростання до величини x_i, пропорційно якій змінюється стандартне відхилення випадкового члена.

2. Виключити *c* спостережень, які розміщені всередині вектора вихідних даних, де $c = \frac{4n}{15}$, *n* – кількість елементів вектора x_i.

3. Побудувати і оцінити дві моделі на основі звичайногометоду найменших квадратів. Перша економетрична модель складається з найменших значень змінної *x*, друга – з найбільших значень цієї змінної. Кожна з регресій побудована на сукупності спостережень обсягом $\frac{n-c}{2}$, за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де *m* – число пояснюючих змінних у регресії (включаючи постійний член).

Величина c повинна бути такою, щоб гарантувати достатність ступенів вільності для правильної оцінки кожної з регресій.

4. Обчислити суму квадратів залишків для кожної з регресій: SSE_1 для малих значень x, і SSE_2 для великих x.

5. Розрахувати критерій F-відношення Фішера: $F = \frac{SSE_2}{SSE_1}$, який у разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F-розподілу з $\frac{n-c-2m}{2}$ ступенями свободи. Це означає, що значення критерію F порівнюється з табличним значенням F-критерію при вибраному рівні значущості α і відповідних ступенях вільності (якщо $F \le F_{табл}$, то гетероскедастичність відсутня).

I. Питання до самостійного вивчення

1. Виявлення гетероскедастичності.
2. Основні види тестів на виявлення гетероскедастичності.

Рекомендовані джерела:

Основні: 8, 9, 14.

Додаткові: 2, 4, 5.

II. Перелік індивідуальних завдань

В таблиці наведені дані про заощадження та доходи населення (млн. ум. од.). Для цих даних перевірити гіпотезу про відсутність гетероскедасстичності за тестом Гольфельда-Квандта.

1.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Заощадження	0,35	0,21	0,09	0,2	0,11	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,07	1,5	1,7	2
Дохід	8,9	9,5	10,2	9,2	10,7	12,6	13,4	15,5	18	19	19,5	21	24	25

2.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Заощадження	0,37	0,2	0,08	0,2	0,1	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,07	1,5	1,6	1,0
Дохід	8,9	9,4	10,1	9,2	10,5	12	13,3	15,1	17	18	19,1	21	24	25

3.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Заощадження	0,38	0,22	0,07	0,2	0,11	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,09	1,5	1,6	2
Дохід	8,7	9,6	9,9	9,1	10,4	12,5	13,3	15	17,9	19	19,4	21	24	25

4.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Заощадження	0,36	0,24	0,09	0,2	0,12	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9	1,07	1,5	1,7	2
Дохід	8,6	9,7	10,1	9	10,7	12,5	13,2	15,5	17	19	19,7	21	24	25

5.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Заощадження	0,32	0,25	0,09	0,2	0,11	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,09	1,5	1,7	2
Дохід	8,2	9,7	10,3	9,3	10,8	12,6	13,5	15,4	18	19	19,7	21	24	25

ІІІ. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення гомоскедастичності та гетероскеластичності.
2. Охарактеризуйте джерела гетероскедастичності.
3. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі ?
4. Які методи виявлення гетероскедастичності Вам відомі ?
5. В чому суть непараметричного тесту ?
6. До яких наслідків може привести гетероскедастичність ?

ТЕМА 8. ПРЕДМЕТ, СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв’язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об’єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв’язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв’язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об’єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

Наведемо приклад типової постановки економічної задачі, що розв'язуються методами математичного програмування

Задача про розподіл ресурсів

Ця задача має пряме відношення до прикладних економічних задач і може бути розв'язана методом динамічного програмування.

Сформулюємо умову цієї задачі:

Інвестиції у розмірі K одиниць коштів повинні бути розподілені між n підприємствами. Відомо, який дохід $pr[i,j]$ ($j = 1,2,..., n$) дає кожне з визначених підприємств при вкладанні у нього i одиниць коштів ($1 < i < K$). Необхідно визначити, як найкраще розподілити інвестиційні кошти між підприємствами, щоб сумарний дохід був максимальним. Під час розв'язування задачі врахувати, що змінні K та i набувають лише цілих невід'ємних значень.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Приклади економічних задач математичного програмування.

2. Типові постановки економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 4, 8, 13.

Додаткові: 1, 4, 19, 22, 26.

II. Перелік індивідуальних завдань

Опишіть одну з відомих формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (задача оптимального розподілу виробничих потужностей, задача оптимального розподілу капіталовкладень, транспортна задача, задача про дієту і т. і.).

Визначте критерій оптимальності та сферу застосування цієї задачі.

III. Питання для самоконтролю

1. Що є предметом дисципліни «математичне програмування» ?
2. Опишіть математичну постановку задачі «математичного програмування».
3. Наведіть приклад економіко-математичної моделі.
4. В яких сферах економіки застосовується математичне програмування ?

ТЕМА 9. ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ЯВИЩ

Розробляючи економіко-математичну модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв’язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ПК як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ПК.

Приклад. Побудувати економіко-математичну модель задачі.

За техніко-економічними показниками, поданими в таблиці, необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-92 з мінімальною собівартістю.

ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ КОМПОНЕНТ БЕНЗИНУ

Показник	Компонента бензину			
	№1	№2	№3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Наявний обсяг, т	70	60	50	30
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо через x_j кількість j-го компонента в суміші (т), $j = 1, 2, 3, 4$.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$68x_1+72x_2+80x_3+90x_4 \geq 92 \cdot 1000.$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3 %:

$0{,}35x_1+0{,}35x_2+0{,}3x_3+0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000.$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000 т:

$x_1+x_2+x_3+x_4=1000$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$x_1 \leq 700;$

$x_2 \leq 600;$

$x_3 \leq 500;$

$x_4 \leq 300;$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$F=40x_1+45x_2+60x_3+90x_4$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$\min F=40x_1+45x_2+60x_3+90x_4$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1+72x_2+80x_3+90x_4 \geq 92000, \\ 0{,}35x_2+0{,}35x_1+0{,}3x_3+0{,}2x_4 \geq 300, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1000, \\ x_1 \leq 700, \\ x_2 \leq 600, \\ x_3 \leq 500, \\ x_4 \leq 300 \\ x_j \geq 0, (j=1,2,3,4. \end{cases}$$

І. Питання до самостійного вивчення

1. Загальна форма запису економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування в розширеному вигляді.

2. Алгоритм запису економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 2, 3, 4, 8, 13, 18.

Додаткові: 1, 4, 11, 15, 17.

ІІ. Перелік індивідуальних завдань

Побудувати економіко-математичнумодель задач.

Задача 1. Визначити оптимальний план виробництва продукції, за якого максимізується дохід для фірми, яка виготовляє продукцію *А* та *В*, використовуючи для цього два види сировини, добові запаси якої мають не перевищувати відповідно 320 та 250 кг. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Сировина	Норма витрат сировини для виготовлення одиниці продукції, кг	
	А	*В*
1	1	4
2	2	3

Працівники відділу збуту фірми рекомендують, щоб виробництво продукції *В* становило не більше як 60% загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціни одиниці продукції *А* та *В* дорівнюють відповідно 20 та 45 грн.

Задача 2. Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми**.** Фірма виготовляє деталі видів *А* та *В* до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, тривалість використання кожного з яких становить 8 год./добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведена в таблиці:

Деталь	Тривалість обробки деталі за верстатами, хв.		
А	12	7	8
В	6	18	14

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі видів *А* та *В* становить відповідно 30 та 40 грн.

Задача 3. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми був би найбільшим.

Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10200 грн. на місяць. Одна хвилина радіореклами коштує фірмі 20 грн., а телереклами – 100 грн. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймі вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід свідчить, що обсяг збуту, який забезпечує 1 хв. телереклами, у 28 разів перевищує обсяг збуту, що забезпечує 1 хв. радіореклами.

Задача 4. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує деревину. Виготовлення одного столу потребує 2 м^2 деревини, однієї шафи – 43 м^2. Трудомісткість виробу складає: одного столу – 3 чол.-год., однієї шафи – 2 чол-год. Прибуток від реалізації становить: одного столу – 90 грн., однієї шафи – 100 грн. Підприємство для виготовлення столів і шаф у своєму розпорядженні має 300 м^2 деревини та 600 чол-год. фонду робочого часу. Визначити, скільки столів і шаф треба виготовити, щоб прибуток від реалізації всіх виробів був максимальним.

Задача 5. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери потрібно вирізати 24, 28 і 18 заготовок трьох розмірів. Лист фанери можна розрізати двома способами. Кількість отриманих заготовок та площу відходів за кожного способу розрізування одного листа фанери наведено у таблиці:

Заготовка	Кількість отриманих заготовок, шт., за способами	
	першим	другим
1	2	6
2	4	4
3	2	3
Площа відходів, см^2	12	18

Скільки листів фанери та за яким способом слід розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок з мінімальними відходами.

III. Питання для самоконтролю

1. Що таке математична модель економічного об'єкта ?
2. Що являє собою система обмежень задачі лігійного програмування ?
3. У вигляді чого записується мета розв'зку задачі лінійного програмування ?

ТЕМА 10: ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.

Задача. Для виготовлення товару A і B підприємство використовує три види сировини — I, II, III. Норми витрат сировини на виробництво одного товару кожного виду, ціна одиниці товару A, B а також загальна кількість сировини наведені в наступній таблиці:

Види сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції		Запаси сировини
	A	B	
I	1	3	9
II	2	1	6
III	2	4	8
Ціна одиниці продукції	1	3	

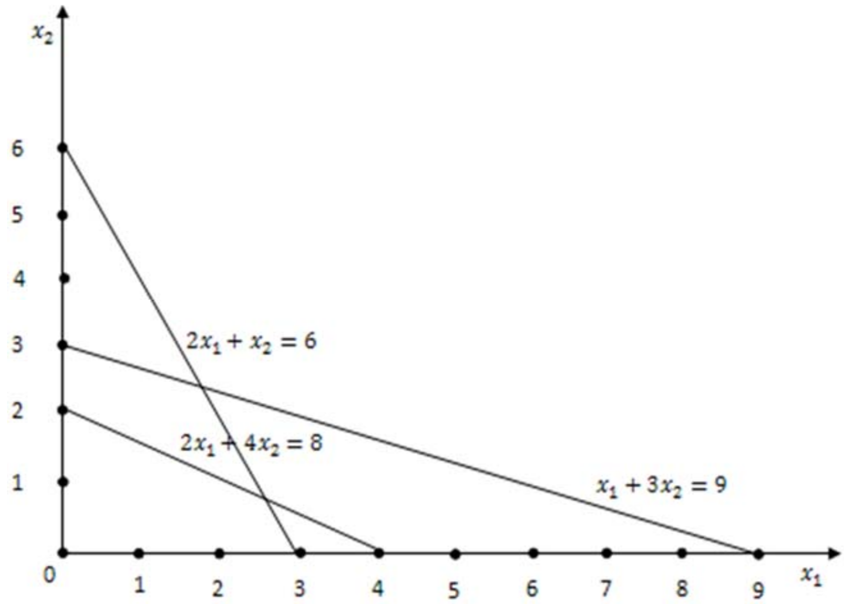
Потрібно організувати випуск даної продукції таким чином, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Розв'язання. Позначимо через x_1 — кількість товару виду *A*; x_2 — кількість товару виду *B*. Тоді математична модель даної задачі полягає у визначенні максимального значення функції мети:

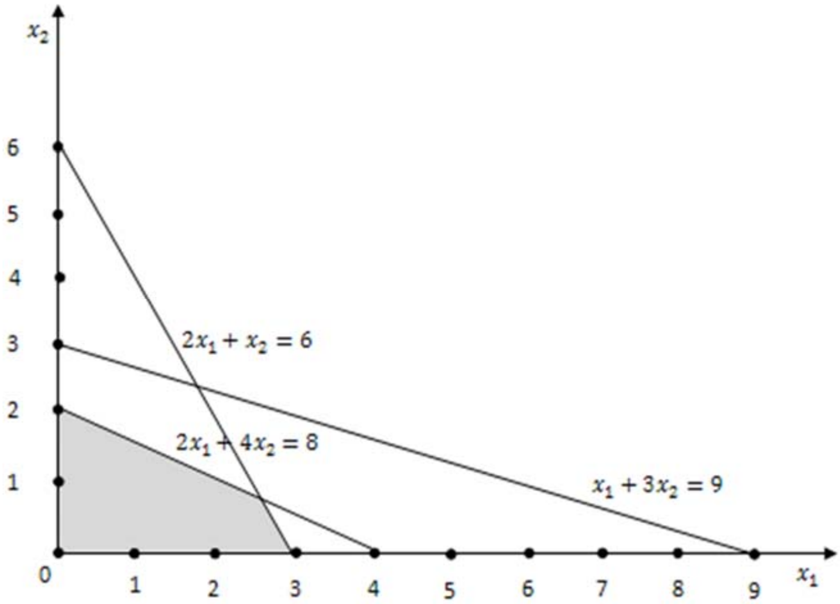
$\max F = x_1 + 3x_2$

при обмеженнях: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_2 + 2x_1 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

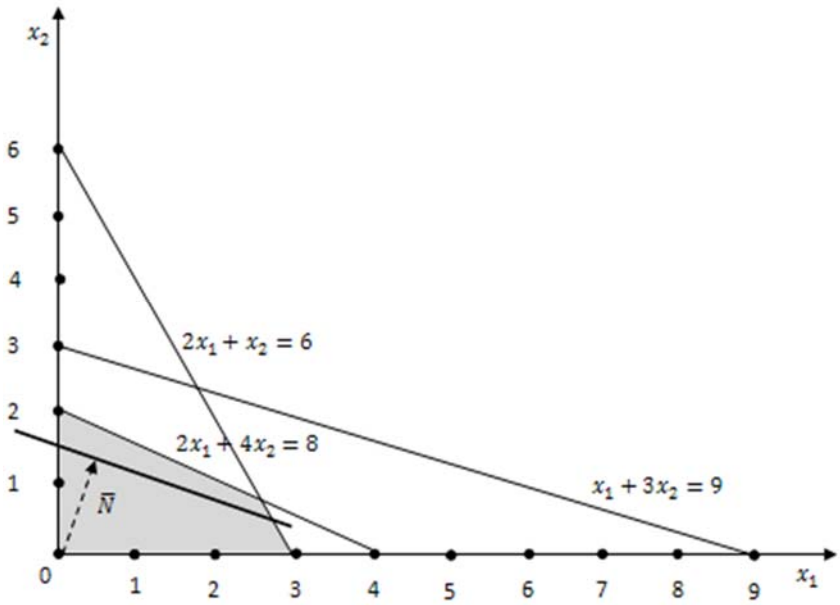
Для того, щоб розв'язати дану задачу графічним методом замінимо знаки нерівностей в системі обмежень на знаки рівності. Після чого побудуємо прямі, рівняння яких ми отримали в результаті даної заміни.



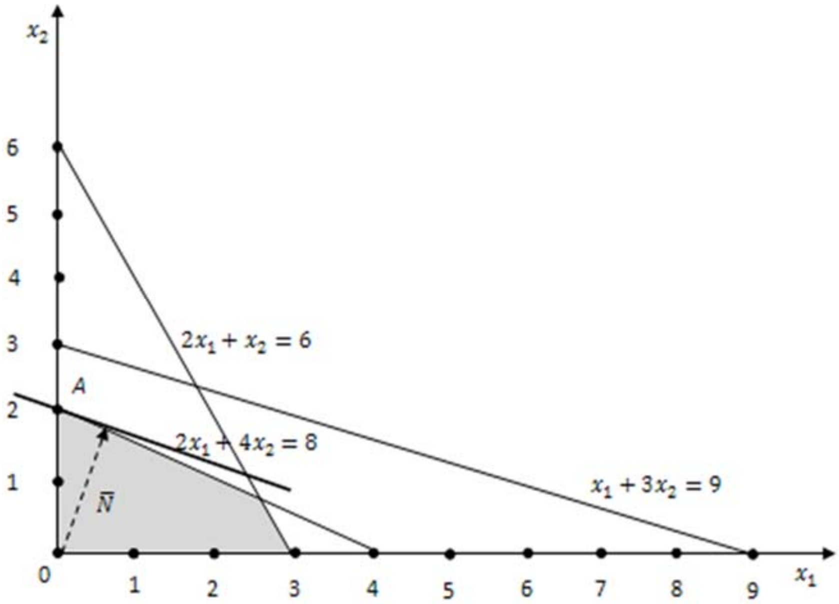
На наступному кроці визначаємо півплощини, що відповідоють кожному обмеженню задачі і знаходимо багатокутник розв'язків:



Далі побудуємо вектор $\vec{N}$ =(c_1; c_2), який визначає напрямок зростання значення функції мети, і пряму перпендикулярну до даного вектора.



Рухаючи пряму в напрямку вектора $\vec{N}$, знаходимо вершину багатокутника розв'язків в якому функція мети набуває максимального значення.



Бачимо, що функція мети набуває максимального значення в точці *A*, у якій пряма $2x_1+4x_2 = 8$ перетинається з віссю x_2. Підставляючи $x_1 = 0$ в дане рівняння отримаємо: $2·0+4x_2=8$; $x_2=2$; $A(x_1; x_2)=(0;2)$. І значення функції в точці *A* рівне $F=1·0+3·2=6$. .

Таким чином прибуток буде максимальним у розмірі 6 умовних одиниць, якщо реалізувати дві одиниці продукції *B* і нуль одиниць продукції типу *A*.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування на основі її геометричної інтерпретації.

2. Можливі випадки у разі застосування графічного методу для розв'язуання задач лінійного програмування.

Рекомендовані джерела:

Основні: 2, 3, 4, 8, 16, 18.
Додаткові: 11, 15, 17, 19.
Інтернет-ресурси: 1, 3.

II. Перелік індивідуальних завдань

Розв'язати графічним методом такі задачі лінійного програмування*:*

Задача 1.

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max);$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2

$$z = x_1 - 2x_2 \to \min(\max);$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 - x_1 \le 0, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 3

$z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4

$z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_2 - x_1 \ge -5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5

$z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_2 - 3x_1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

III. Питання для самоконтролю

1. Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим ?

2. Що таке багатоектник розв'язків задачі лінійного програмування ?

3. Який план називається опорним ?

4. Опишіть алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування.

5. Які задачі можна розв'язувати графічним методом ?

6. Які можливі випадки при знаходженні екстремального значеня цільової функції при застосуванні графічного методу до розв'язування задач лінійного програмування ?

ТЕМА 11. ОСНОВИ АНАЛІЗУ МОДЕЛЕЙ НА ЧУТЛИВІСТЬ

Аналіз моделей на чутливість − це процес, чкий реалізується після того, як оптимальний розв'язок задачі отриманий. В рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального розв'язку до визначення змін вихідної моделі.

Перша задача аналізу на чулливість: на скільки можна скоротити або збільшити запаси ресурсів**.** Тут важливо проаналізувати два аспекти:

1. На скільки можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення оптимального значення цільової функції ?
2. На скільки можна знизити запас деякого ресурсу при збереженні оптималного значення цільової функції ?

Друга задача аналізу на чутливість: за обмежень на витрати, які зв'язпні з додатковим залученням ресурсів (що характерно для більшості економічних задач), природньо поставити питання: якому з ресурсів варто віддати перевагу при вкладенні додаткових капіталовкладень ?

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції.

А саме, позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу i через y_i. Тоді величина y_i визначається із співвідношення:

$$y_i = \frac{\text{Максимальний приріст оптимального значення цільової функції}}{\text{Максимально допустимий приріст об'єму ресурсу i}}.$$

Третя задача аналізу на чутливість: у яких межах допустима зміна коефіцієнтів цільової функції.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Графічні методи аналізу моделей на чутливість.
2. Аналітичний пошук припустимого діапазону зміни ціни.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 2, 3, 13, 16.
Додаткові: 11, 15, 17, 26.

II. Перелік індивідуальних завдань

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

Фабрика виготовляє два види клейових сумішей для наклеювання керамічних плиток: перший вид − для зовнішніх робіт (морозостійкий), а другий вид – для внутрішніх робіт. Для виробництва клейових сумішей використовуються два інградієнти: А і В. Максимальноможливі добові запаси цих інградієнтів складають 6 і 12 т відповідно. Відомі витрати інградієнтів А та В на 1т відповідних клейових сумішей наведені в таблиці:

Параметри задачі про виробництво клейових сумішей

Інградієнти	Витрати інградієнтів, т інгр. /т суміші		Запас інградієнтів, т інгр. /добу
	Клейові суміші 1-го виду	Клейові суміші 2-го виду	
А	1	2	6
В	3	2	12

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на клейові суміші 2-го виду ніколи не первищує попиту на клейові суміші 1-го виду більш, ніж на 1 т. Крім того встановлено, що попит на клейові суміші 2-го виду ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни однієї тони клейових сумішей дорівнюють: 4 тис. грн. для суміші першого виду; 3 тис. грн. для чуміші другого виду.

Яку кількість суміші кожного виду треба виготовляти, щоб виторг від реалізації продукції був максимальним ?

Провести графічний та аналітичний аналіз припустимого діапазону зміни цін.

III. Питання для самоконтролю

1. Коли проводиться аналіз моделей на чутливість ?

2. Що виявляється в рамках аналізу моделей на чутливість ?

3. На які питання відповідає кожна з трьох задач аналізу моделей на чутливість ?

4. Опишіть суть графічного аналізу припустимого діапазону зміни ціни.

ТЕМА 12. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Розв'язати задачу табличним симплекс-методом:

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Канонічна модель задачі має вигляд:

$$F = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0. \end{cases}$$

Змінні x_3, x_4, x_5, x_6 утворюють первинний допустимий базис, тобто $Б^0 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Перша симлекс-таблиця має вигляд (табл. 1).

Таблиця 1

Крок 0			4	3	0	0	0	0	
Б	$c_б$	b	a_{x1}	a_{x2}	a_{x3}	a_{x4}	a_{x5}	a_{x6}	θ
x_3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
x_4	0	12	3	2	0	1	0	0	4
x_5	0	1	-1	1	0	0	1	0	∞
x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	∞
"Δ"		0	-4	-3	0	0	0	0	

Як виходить з таблиці, опорний план, який відповідає первинному базису має вид $X_1 = (0, 0, 6, 12, 1, 2)$. Цей розв'язок не є оптимальним, оскільки серед елементів Δ-рядка присутні від'ємні числа (оцінки), а значить план треба покращувати.

Найменшою з від'ємних оцінок є оцінка вектора A_{x1} (провідний стовпець) $\Delta_1 = \min(\Delta_1 = 4; \Delta_2 = -3) = -4$, а тому, щоб покращити базис введемо в нього x_1.

Знайдемо тепер змінну, яка має бути виключена з базису. Для цього аналізуємо значення θ-стовпця, які знайдені наступним чином:

$$\theta_1 = \frac{6}{1} = 6,\ \theta_2 = \frac{12}{3} = 4,\ \theta_3 = -\infty,\ \theta_4 = -\infty.$$

Мінімальне значення має θ_2, яке відповідає другому рядку (провідний рядок). Із базису виводимо змінну x_4. На перетині провідного стовпця та рядка знаходиться провідний елемент. Провідний стовпець та рядок виділені сірим кольором, а провідний елемент виділений більш темним кольором.

Симплекс-таблицю (табл. 2), що відповідає новому базису $Б^1 = \{x_3, x_1, x_5, x_6\}$, будуємо на основі попередньої симплекс-таблиці.

Таблиця 2

Крок 1			4	3	0	0	0	0	
Б	$c_б$	*b*	a_{x1}	a_{x2}	a_{x3}	a_{x4}	a_{x5}	a_{x6}	θ
x_3	0	2	0	4/3	1	-1/3	0	0	3/2
x_4	4	4	1	2/3	0	1/3	0	0	6
x_5	0	5	0	5/3	0	1/3	1	0	3
x_6	0	2	0	1	0	0	0	1	2
"Δ"		16	0	-1/3	0	4/3	0	0	

Оскільки умова оптимальності при базисі $Б^1$ не виконується ($\Delta_2 = -1/3 < 0$), то базис $Б^1$ також підлягає покращенню. В базис вводимо x_2, так як тільки Δ_2 має від'ємну оцінку. Заповнивши θ-стовпець, помічаємо, що найменше значення θ відповідає рядку із базисною змінною x_3, яку і виводимо з базису.

Симплекс-таблиця, що відповідає черговому допустимому базису $Б^2 = \{x_2, x_1, x_5, x_6\}$, представлена табл. 3:

Таблиця 3

Крок 2			4	3	0	0	0	0	
Б	$c_б$	*b*	a_{x1}	a_{x2}	a_{x3}	a_{x4}	a_{x5}	a_{x6}	θ
x_2	3	3/2	0	1	3/4	-1/4	0	0	
x_1	4	3	1	0	-1/2	1/2	0	0	
x_5	0	5/2	0	0	-5/4	3/4	1	0	
x_6	0	1/2	0	0	-3/4	1/4	0	1	
"Δ"		33/2	0	0	1/4	5/4	0	0	

В табл. 3 всі оцінки векторів умов додатні. Отже, знайдений базис $Б^2$ оптимальний. Йому відповідає опорний план X^*=(3; 3/2; 0; 0; 5/2; 1/2).

Оптимальне значення цільової функції, яке відповідає значенню елемента Δ_0 дорівнює 33/2. Оскільки далі покращувати базис потреби немає, θ-стовпець не заповнюємо.

Відповідь: X^*=(3; 3/2; 0; 0; 5/2; 1/2).

I. Питання до самостійного вивчення

1. Застосування табличного симплекс-методу до розв'язування економічних задач.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 3, 4, 8, 13, 16.

Додаткові: 11, 15, 17, 19, 22 .

ІІ. Перелік індивідуальних завдань

Розв'язати економічні задачі табличним симплекс-методом:

1.Для виготовлення товару *A*, *B* і *C* підприємство використовує три види сировини *I*, *II*, *III*. Норми витрат сировини на виробництво одного товару кожного виду, ціна одиниці товару *A*, *B* і *C* а також загальна кількість сировини наведені в наступній таблиці:

Норми витрат сировини на виробництво одного товару

Види сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції			Запаси сировини
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Ціна одиниці продукції	9	10	16	

Знайти такий план випуску даної продукції, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

2. Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 у.о. на місяць. Досвід минулих років показав. Що 1 у.о., витрачена на рекламу на телебаченні, дає фірмі прибуток у розмірі 10 у.о., а витрачена на рекламу у радіо та газетах ─ відповідно 4 та 8 у.о. Витрати на радіорекламу мають становити не менш як 25% рекламного бюджету, а на газетну рекламу ─ не менш як 50% витрат на телебачення.

Визначити такий варіат розподілу рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток від рекламування своєї продукції.

3. Продукція чотирьох видів А, В. С і Д проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задано таблицею.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції (год.)			
	А	В	С	Д
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають, як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 дол. для верстата 1 і 15 дол. ─ для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежений: для верстата 1 він становить 450 машино-годин, а для верстата 2 ─ 380 машино-годин. Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 дол.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

4. Господарство планує вирощувати три сільськогосподарські культури (пшеницю, картоплю та гречку) і може виділити для цього 300 га земельних угідь. Для успішного вирощування сільськогосподарські культури потребують комплексного мінерального добрива, запас якого в господарстві обмежений

120 т.

Норму внесення мінерального добрив, урожайність та закупівельні ціни на сільськогосподарські культури наведено в таблиці:

Показник	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Картопля	Гречка
Урожайність (ц/га)	40	200	15
Закупівельна ціна (ум.од./ц)	10	5	30
Норма внесення добрива (кг\га)	300	500	200

Площа земельних угідь, що відводяться під вирощування гречки, має не перевищувати 40 га.

Визначити такий план розподілу посівної площі господарства, який дає найбільший дохід від вирощування сільськогосподарських культур.

5. Фірма планує організувати виробництво двох видів продукції А та В, але має для цього обмежений інвестиційний фонд у розмірі 5000 дол. У разі потреби цю суму можна збільшити на 10000 дол за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого становить 20%. Втрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукції А, дорівнюють 50 дол., а одиниці продукції В — 100 дол. Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції А становить 50 дол., а одиниці продукції В — 100 дол. Фірма має попереднє замовлення на виробництво не менш як 100 одиниць продукції А та 50 одиниць продукції В.

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток з урахуванням виплат за кредит.

ІІІ. Питання для самоконтролю

1. Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплекс-метод ?
2. Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплекс-методом.
3. Як вибрати розв'язувальний елемент ?
4. В чому суть методу штучного базису ?.

ТЕМА 13. ДВОЇСТІСТЬ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача 1 та задача 2 є відповідно двоїстими задачами лінійного програмування

Задача I (вихідна)	Задача II (двоїста)
max F=c_1x_1+c_2x_2+…+c_nx_n за обмежень:	min Z=b_1y_1+b_2y_2+…+b_ny_n
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$ (*) і умові невід'ємності $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}$ (**) і умові невід'ємності $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.$
Скласти такий план випуску продукції Х=(x_1; x_2,…, x_n), при якому прибуток (виторг) від реалізації продукції буде максимальним за умови, що споживання ресурсів по кожному виду продукції не перевищить наявних ресурсів.	Знайти такий набір цін (оцінок) ресурсів У=(y_1; y_2,…, y_m), при якому загальні витрати на ресурси будуть мінімальними за умови, що витрати на ресурси при виробництві кожного виду продукції будуть не менші прибутку (виторгу) від реалізхації цієї продукції.

Двоїста задача будується на основі наступних правил.

1. Цільова функція вихідної задачі задається на максимум, а цільова функція двоїстої задачі задається на мінімум.

2. Матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

яка складається з коефіцієнтів при невідомих вихідної задачі переходить у A^T.

3. Число невідомих двоїстої задачі дорівнює числу рівнянь системи обмежень (*). Число рівнянь в системі обмежень двоїстої задачі дорівнює числу невідомих вихідної задачі.

4. Коефіцієнти при невідомих цільової функції двоїстої задачі дорівнюють стовпчику вільних членів вихідної задачі. Вільні члени системи обмежень (**) двоїстої задачі дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої задачі.

5. Якщо деяка змінна x_j може приймати тільки додатні значення, то j-та нерівність в системі обмежень двоїстої задачі задається у вигляді нерівності.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Приклади застосування теорії двоїстості.
2. Використання теорем двоїстості в економіці.
3. Використання двоїстих оцінок для обгрунтування цін на ресурси та продукцію.

Рекомендовані джерела:

Основні: 3, 8, 13, 16, 18.
Додаткові: 15, 17, 19.

II. Перелік індивідуальних завдань

Розробіть просту економіко-математичну модель. Запишіть до неї двоїсту.

Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

III. Питання для самоконтролю

1. У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні ?
2. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої ?
3. Сформулюйте теореми двоїстості та дайте їх економічне тлумачення.
4. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

ТЕМА 14. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Розв'язати транспортну задачу:

$$a_i = (150;60;90), \quad b_j = (110;50;60;80), \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) ідея методу північно-західного кута полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У комірку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної комірки в цьому ж рядку або у стовпці і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній комірці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. Потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника – $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в комірку A_1B_1 записуємо менше із значень $a_1, b_1,$ *тобто* 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг його потреб $b_2=50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить $150 - 110 = 40$. Отже, від першого постачальника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в комірку A_1B_2 записуємо число 40.

Всі ці міркування зручно представити в математичній формі наступним чином:

$x_{11} = \min(a_1; b_1) = \min(150;110) = 110$. Попит першого споживача задоволений і ми далі першим стовпцем не займаємося стовпець закритий). Переходимо до комірки A_1B_2.

$x_{12} = \min((a_1 - b_1); b_2) = \min((150-110);50) = 40.$ В комірку A_1B_2 табл. 4 записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, попит другого споживача задоволений, закриваємо перший рядок та другий стовпець і переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2.

$x_{22} = \min(a_2; (b_2 - 40)) = \min(60;(50-40)) = 10$. В комірку A_2B_2 табл. 4 записуємо число 10. Оскілки попит другого споживача задоволений, закриваємо другий стовпець. Переходимо до комірки A_2B_3.

$x_{23} = \min((a_2 - 10); b_3) = \min((60-10);60) = 50$. В комірку A_2B_3 табл. 4 записуємо число 50. Потужність другого споживача вичерпана (другий рядок закриваємо). Переходимо до комірки A_3B_3. $x_{33} = \min(a_3; (b_3 - 50)) = \min(90;(60-50)) = 10$. В комірку A_3B_3 табл. 4 записуємо число 10. Третій стовпець закритий (попит третього споживача задоволений). Переходимо до комірки A_3B_4. $x_{34} = \min((a_3 - 10); b_4) = \min((90-10);80) = 80$.

Отже, в табл. 4 у заповнених комірках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях – обсягам потреб відповідних споживачів.

Таблиця 4

Постачальники	Запаси	Споживачі			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним.

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної комірки), отже, це коштуватиме 110 × 4 = 440 ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880$ (ум. од.).

Опорний план транспортної задачі, який знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх постачань може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

б) ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють комірку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі (табл. 5).

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3, до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції дорівнює 1 ум. од.). Заповнимо, наприклад, A_2B_3.

$x_{23} = \min(a_2; b_3) = \min(60; 60) = 60$.

В комірку A_2B_3 ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені (закриваємо другий рядок та третій стовпець). Мінімальною є також вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також комірку A_3B_2.

$x_{32} = \min(a_3; b_2) = \min(90; 50) = 50$.

З комірок таблиці, що залишились незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. – для комірок A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 та A_3B_4. Заповнення комірок A_2B_4 та A_1B_3 неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3 а споживач B_3, повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки комірку A_3B_1 чи A_3B_4. Заповнимо A_3B_4.

$x_{34} = \min((a_3 - 50); b_4) = \min((90 - 50); 11) = 40$.Запаси третього постачальника вже повністю вичерпані. Третій рядок закритий.

Знову вибираємо найменшу вартість для комірок таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби – задоволені.

$x_{11} = \min(a_1; (b_1 - 40)) = \min(150; 110) = 110$. Перший стовпець закриваємо. Залишилася ще не вичерпаною потужність першого постачальника.

$x_{14} = \min((a_1 - 110); (b_4 - 40)) = \min((150 - 110); (80 - 40)) = 40$.

Заносимо отримані числа в табл. 5:

Таблиця 5

b_j / a_i	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4	2	5 40
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2
$a_3 = 90$	2	1 50	4	2 40

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Загальна кількість заповнених комірок повинна бути рівною $m+n-1$ (m – число рядків, n – число колонок). Якщо число заповнених комірок виявиться меншим за цю величину, то здійснюється перерозподіл поставок або в одну із вільних комірок ставиться нульова поставка і ця комірка вважається заповненою.

Після того, як складено перший опорний план, за допомогою алгоритму методу потенціалів здійснюється перевірка його на оптимальність і, якщо він не оптимальний, його покращують.

Метод потенціалів

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених комірок у таблиці дорівнює п'яти, а $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Для дальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх комірок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту комірку, яка не утворює замкненого циклу із заповненими комірками. Наприклад, заповнимо нулем комірку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

Таблиця 6

A_i	B_i				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 + **2**	5 – 40	$u_1 = 5$
$a_2 = 60$	5	3	1 – 60	2 + 0	$u_2 = 2$
$a_3 = 90$	2	1 50	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь (для заповнених комірок таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4; \\ u_1 + v_4 = 5; \\ u_2 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_4 = 2; \\ u_3 + v_2 = 1; \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, узявши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь:

$u_1 = 5$; $u_2 = 2$; $u_3 = 2$; $v_1 = -1$; $v_2 = -1$; $v_3 = -1$.

Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю. Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх комірок таблиці):

$$\begin{aligned}
&A_1B_2: \quad u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 \quad = 4; \\
&A_1B_3: \quad u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 \quad > 2; \\
&A_2B_1: \quad u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 \quad < 5; \\
&A_2B_2: \quad u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 \quad < 3; \\
&A_3B_1: \quad u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 \quad < 2; \\
&A_3B_3: \quad u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 \quad < 4.
\end{aligned}$$

Умова оптимальності не виконується для комірки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної комірки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх комірок таблиці.

Потрібно заповнити комірку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення комірки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з комірки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у порожню комірку A_1B_3 переносимо менше з чисел $\boldsymbol{x_{ij}}$, які розміщені в комірках зі знаком «–». Одночасно це саме число $\boldsymbol{x_{ij}}$ додаємо до відповідних чисел, що розміщені в комірках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в комірках позначених знаком «–». У даному разі $\min\{60, 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40.$ Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для комірки A_1B_3 – 40 од. продукції, а для A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., а для A_2B_4 – (0 + 40) = 40 од. Комірка A_1B_4 звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені комірки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених комірок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати $(m+n-1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 7):

Таблиця 7

A_i	B_i: $b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	u_i
$a_1 = 150$	4 – 110	4	2 + 40	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$	5	3	1 – 20	2 + 40	$u_2 = -1$
$a_3 = 90$	2 + 1	1 50	4	2 – 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для комірки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл. 8.

Таблиця 8

A_i	B_i: $b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	u_i
$a_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$a_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$a_3 = 90$	2 20	1 50	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

$$F = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 730 \text{ (ум. од.)}.$$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він є оптимальний. За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 одиниць продукції від першого постачальника та 20 одиниць – від третього постачальника. Другий споживач задовільняє свій попит за рахунок перевезення 50 одиниць продукції від третього постачальника і т. д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 730 ум. од.

Відповідь: 730 ум. од.

І. Питання до самостійного вивчення

1. Необхідна та достатня умова існування розв'язку транспортної задачі.
2. Відкрита та закрита транспортна задача.
3. Умова оптимальності транспортної задачі.
4. Розв'язування транспортних задач різних видів.

Рекомендовані джерела:

Основні: 1, 2, 3, 8, 13, 16, 18.

Додаткові: 11, 15, 17, 19, 29.

Інтернет-джерела: 1, 2.

II. Перелік індивідуальних завдань

Розв'язати транспортну задачу:

1. $\begin{array}{l} a_i = (50;70;60;20), \\ b_j = (40;40;120), \end{array} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{array}{l} a_i = (8;7;6), \\ b_j = (7;10;6), \end{array} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{array}{l} a_i = (30;35;60), \\ b_j = (25;25;40;30), \end{array} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{array}{l} a_i = (20;45;40;35), \\ b_j = (60;30;50), \end{array} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 14 & 12 & 7 \\ 15 & 13 & 11 \end{pmatrix}$

5. $\begin{array}{l} a_i = (15;10;5;20), \\ b_j = (10;20;15), \end{array} \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

III. Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування ?
2. Властивості опорних планів транспортної задачі.
3. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту ?
4. Які Ви знаєте методи побудови опорного плану ?
5. Назвіть етапи розв'язування транспортної задачі методом потенціалів.

ТЕМА 15. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ОПУКЛОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає в визначенні максимального (мінімального) значення функції $F=f(x_2,\ldots,x_n)$, за умови, що її змінні задовільняють співвідношення:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = 1,2,...,k. \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, i = k+1,...,m, \end{cases}$$

де $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – деякі відомі функції n змінних.

Причому або цільова функція, або деякі з обмежень системи містять нелінійні функції змінних.

Алгоритм знаходження розв'язку задачі нелінійного опуклого програмування з використанням її геометричної інтерпретації

1. Знаходять область допустимих розв'язків задачі, яка визначається співвідношеннями системи, записаної вище (якщо область пуста, то задача немає розв'язку).

2. Будують гіперповерхню $f(x_2, \dots, x_n) = h$.

3. Визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня або встановлюють нерозв'язуваність задачі із-за необмеженості фукції F зверху (знизу) на множині допустимих розв'язків.

4. Знаходять точку області допустимих розв'язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня і визначають в ній значення функції F.

I. Питання до самостійного вивчення

1. Графо-аналітичний розв'зок задачі лінійного програмування у просторі двох змінних.

2. Застосування алгоритму знаходження розв'язку задачі нелінійного опуклого програмування з використанням її геометричної інтерпретації.

Рекомендовані джерела:

Основні: 8, 13, 16.

Додаткові: 11, 17, 26, 29.

II. Перелік індивідуальних завдань

1. Знайдіть та опишіть конкретну задачу нелінійного опуклого програмування у просторі двох змінних.

2. Розв'яжіть запропоновану задачу графо-аналітичним методом.

III. Питання для самоконтролю

1. Який загальний вигляд має задача нелінійного програмування ?

2. Опишіть алгоритм знаходження розв'язку задачі нелінійного опуклого програмування з використанням її геометричної інтерпретації.

ТЕМА 16. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ.

Для будь-якого об'єкта моделювання властиві якісні й кількісні характеристики. Математичне моделювання віддає перевагу виявленню кількісних особливостей і закономірностей розвитку систем. Це моделювання значною мірою абстрагується від конкретного утримування системи, але обов'язково враховує його, намагаючись відобразити систему за допомогою апарата математики. Математичне моделювання являє собою велику сферу інтелектуальної діяльності. Це досить складний процес створення математичного опису моделі. Воно містить у собі кілька етапів. Математичне моделювання складається з чотирьох етапів: перший – змістовний опис об'єкта або процесу, коли виділяються основні складові системи, закономірності системи. Воно містить у собі числові значення відомих характеристик і параметрів системи; другий – формулювання прикладного завдання або завдання формалізації змістовного опису системи. Прикладне завдання містить у собі виклад ідей дослідження, основних залежностей, а також постановку питання, розв'язання якого досягається за допомогою формалізації системи; третій – побудова формалізованої схеми об'єкта або процесу, що припускає вибір основних характеристик і параметрів, які будуть використані при формалізації; четвертий – перетворення формалізованої схеми в математичну модель, коли йде створення або підбір відповідних математичних функцій. Винятково важливу роль у процесі створення математичної моделі системи відіграє формалізація, під якою розуміється специфічний прийом дослідження, призначення якого у тому, щоб уточнювати знання за допомогою виявлення його форми (способу організації, структури як зв'язку компонентів). Процедура формалізації припускає введення символів. При цьому завдяки формалізації виявляється така інформація, що не вловлюється на рівнях змістовного аналізу. Зрозуміло, що формалізація малоефективна стосовно складних систем, що відрізняється багатством і розмаїтістю зв'язків. Після створення математичної моделі починається її застосування для дослідження реального процесу. При цьому спочатку визначається сукупність початкових умов і величин. Тут можливі кілька способів роботи з моделлю: аналітичне її дослідження за допомогою спеціальних перетворень і вирішенням завдань; використання чисельних методів розв'язання, наприклад методу статистичних випробувань, методу імітаційного моделювання випадкових процесів, а також за допомогою застосування для моделювання комп'ютерної техніки. При математичному моделюванні складних систем треба враховувати складність системи. Складна система є багаторівневою конструкцією із взаємодіючих елементів, об'єднаних у підсистеми різних рівнів. Математична модель складної системи складається з математичних моделей елементів і математичних моделей взаємодії елементів. Взаємодія елементів розглядається звичайно як результат сукупності впливів кожного елемента на інші елементи.

Розглянемо модель міжгалузевого балансу.

Нехай економічна система складається з n галузей. Кожна i-та з n галузей випускає за деякий період x_i одиниць ($i=\overline{1,n}$) валової продукції. Якщо покласти a_{ik} нормативні витрати i-тої галузі на виробництво одиниці продукції к-тої галузі, то міжгалузеві зв´язки з скінченним вектором попиту $У(y_1;y_2;\dots y_n)$ можна описати матричним рівнянням:

$X=A\cdot X+У$, або $(E-A)\cdot X=У$.

Це рівняння називають статичним рівнянням Леонтьєва міжгалузевого балансу.

$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ матриця прямих витрат, яка характеризує технологічну структуру економіки.

$X=(x_1;x_2;\dots x_n)$ вектор валового продукту.

У розгорнутому вигляді рівняння записуються так:

$$\begin{cases} x_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots a_{1n}x_n = y_1; \\ x_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots a_{2n}x_n = y_2; \\ \dots \\ x_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots a_{nn}x_n = y_n. \\ . \end{cases}$$

За допомогою цих систем рівнянь можна розв´язувати дві основні задачі:

─ при відомих обсягах валової продукції знаходити вільний залишок У, ця задача розв´язується за допомогою безпосередніх обчислень;

─ за відомим вільним залишком У знаходити Х, для цього потрібно розв'язати систему рівнянь.

Зауважимо, що чим ефективніший технологічний процес, тим менші параметри виробничої матриці. Надмірне збільшення цих параметрів може привести до від´ємних вільних залишків, тобто до збиткового виробництва.

Ті ж рівняння Леонтьєва можна розглядати як такі, що описують торгівлю ряду країн між собою. У цьому випадку величини $x_1; x_2;\dots x_n$ задають валові національні доходи країн, а величини $y_1;y_2;\dots y_n$ національні витрати країн, величини виду $a_{ij}x_j$ задають обсяги імпорту країни номер j з країни номер і.

Якщо існує розв´язок системи у другому випадку, то матриця А називається **продуктивною**.

Наведемо критерії продуктивності:

─ якщо матриця існує і її коефіцієнти додатні, то А продуктивна.

─ якщо сума елементів матриці А по любому стовпчику чи рядку не перевищує 1, причому хоча б для одного рядка (стовпчика) ця сума менше одиниці, то матриця А продуктивна.

І. Питання до самостійного вивчення

1. Застосовування методів моделювання при дослідженні економічних систем.
2. Приклади економічних задач на застосування моделі міжгалузевого балансу.

Рекомендовані джерела:

Основні: 2, 7, 11, 12.

Додаткові: 5, 6, 7.

Інтернет-ресурси: 1, 2,3.

II. Перелік індивідуальних завдань

Розв'язати задачу.

Для підприємства, що має у своєму складі три цехи, задано матрицю прямих витрат А. Для даного вектору попиту У знайти валовий випуск продукції кожної галузі.

1. А=$\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$. У=$(80; 17; 15)$.

III. Питання для самоконтролю

1. Які основні типи задач розв'язуютьсяза допомогою моделі Леонтьєва ?
2. Як записується модель міжгалузевого балансу для трьох секторів економіки ?
3. Яка матриця прямих витрат є продуктивною ?
4. Назвіть критерії продуктивності матриці в моделі міжгалузевого балансу.

4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ. ЗАСОБИ ПРОВЕДЕННЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

Самостійна робота здобувачів вищої освіти з дисципліни «Математичне моделювання економічних процесів» оцінюється у 28 балів. Зокрема, сюди входять наступні види робіт:

1. Участь у студентській науковій конференції з підготовкою публікації або проходження одного з масових безкоштовних онлайн-курсів на відповідну тематику з отриманням сертифікату (20 балів);
2. виконання індивідуально-практичних завдань за варіантом (8 балів).

Результати самостійної роботи здаються здобувачами вищої освіти поетапно протягом семестру відповідно до вивченого матеріалу згідно тематичного плану.

Підсумковий контроль – *екзамен*.

Якщо здобувач вищої освіти повністю виконав програму дисципліни та набрав протягом семестру 75 і більше балів, то підсумкова оцінка може бути виставлена без опитування чи виконання екзаменаційного завдання на момент проведення екзамену.

У разі, якщо здобувач вищої освіти бажає поліпшити свою оцінку, або не набрав 75 балів, він складає екзамен з усієї програми навчальної дисципліни у вигляді письмового опитування знань згідно завдань встановленого зразка. Результат виконання екзаменаційних завдань оцінюється з урахуванням результатів у співвідношенні 80:20, де 80 – максимальна оцінка за виконання екзаменаційного завдання, 20 – результат поточної успішності відповідно до шкали переводу поточної роботи для врахування її при підсумковій оцінці.

.

5. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основні джерела

1. *Бех О. В. Математичне програмування: навч. посібник / О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак. – Львів: Магнолія 2006, 2007. – 200 с.*

2. Вітлінський В. В. Математичне програмування: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.

3. Гершгорн А. С. Математическое программирование и его применение в экономических расчетах: учебник / А. С. Гершгорн. – М. : Экономика, 1968. – 200 с.

4. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение / Дж. Данциг. – М. : Прогресс, 1966.

5. *Економетрія. Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів усіх спеціальностей та форм навчання / Г. А. Рудомін, М. В. Бондар, Л. П. Гусак. – Вінниця: центр підготовки навчально-методичних видань ВТЕІ КНТЕУ, 2006. – 42 с.*

6. Економетрія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Л. Лещинський, В. В. Рязанцева, О. О. Юнькова. – К. : МАУП, 2003. – 208 с.

7. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин и др.; Под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2005. – 407 с.

8. Івченко І. Ю. Математичне програмування: навч. посібник / І. Ю. Івченко. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.

9. *Корольов О. А. Економетрія: навч. посібник / О. А. Корольов. – 2-ге вид., випр. скор. – К. : Книга, 2005. – 416 с.*

10. Корольов О. А. Економетрія: Практикум: навч. посібник / О. А. Корольов, В. В. Рязанцева. – К. : КНТЕУ, 2005. – 278 с.

11. Лугінін О. Є. Економетрія: навч. посібник / О. Є. Лугінін. – 2-е вид., перероб. та допов. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 278 с.

12. Лук'яненко І. Г. Економетрика: Підручник / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова. – К. : Знання, 1998. – 494 с.

13. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel: навч. посібник / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов. – К. : Четверта хвиля, 1998. – 208 с.

14. Математичне програмування. Збірник задач / Уклад. В. В. Левчук, С. В. Білоусова, В. І. Денисенко. – К. : КНТЕУ, 2007. – 111 с.

15. *Методичні вказівки для виконання практичних робіт та самостійної роботи з використанням ПЕОМ з дисципліни «Економіко-математичне моделювання»: освіт.-кваліф. рівень «бакалавр»: напр. підгот. 030502 «Економічна кібернетика»: д. ф. н., з. ф. н. Ч. 2. Економетрія / уклад. : Г. А. Рудомін, М. В. Бондар. – Вінниця: Центр підготовки наукових та навчально-методичних видань ВТЕІ КНТЕУ, 2010. – 115 с.*

16. Методичні рекомендації і завдання для проведення практичних занять з дисципліни «Економіко-математичне моделювання». Ч. 1. Математичне програмування / Уклад. О. І. Жмурко, Т. Є. Магас, Г. А. Рудомін. – Вінниця: ВТЕІ, 2008. – 80 с.

17. *Назаренко О. М. Основи економетрики: Підручник / О. М. Назаренко. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 392 с.*

18. *Наконечний С. І. Математичне програмування: навч. посібник / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2004. – 452 с.*

19. Практикум по эконометрике: учеб. пособие / И. И. Елисеева, С. В. Курышева, Н. М. Гордеенко и др.; под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 192 с.

20. Эконометрика: Учебник / И. И. Елисеева, С. В. Курышева, Т. В. Костеева и др.; под ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 576 с.

Додаткові джерела

1. Аллен Рой. Математическая экономия / Рой Аллен. – М. : Мир, 1964.

2. *Бессалов А. В. Эконометрика: учеб. пособие / А. В. Бессалов. – К. : Кондор, 2007. – 196 с.*

3. Бугір М. Математика для економістів: лінійна алгебра, лінійні моделі: Посібник для студентів / М. Бугір. –К. : Академія, 1998. – 272 с.

4. *Вовк В. М., Камінська Н. І., Прийма С. С. Моделювання економічних процесів підприємства : монографія. Львів, 2011. 448 с.*

5. *Глушик М. М., Копич І. М., Сороківський В. М. Математичне програмування : підруч. Львів : Новий Світ-2000, 2012. 280 с.*

6. Джостон Д. Эконометрические методы / Д. Джостон. – Пер. с англ. – М. : Статистика, 1980. – 444 с.

7. Доугерти К. Введение в економетрику / К. Доугерти. – Пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – 402 с.

8. Емельянов С. В. Многокритериальные методы принятия решений / С. В. Емельянов, О. И. Ларичев . – М. : Знание, 1965. – 32 с.

9. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. – М. : Наука, 1979.– 256 с.

10. Зайченко Ю. П. Исследование операцій / Ю. П. Зайченко. – 3-е изд., перераб. и доп. – К. : Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 552 с.

11. Канторович Л. Г. Оптимальные решения в экономике / Л. Г. Канторович, А. Б. Горстко. – М. : Наука, 1972.

12. Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

13. Компьютеризация информационных процессов на промышленных предприятиях / В. Ф. Сытник, Х. Срока, Н. В. Еремина и др. – К. : Тэхника; Катовице: Экономическая академия им. К. Адамецкого, 1991.– 215 с.

14. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн , Т. Корн. – М. : Наука, 1968.– 327 с.

15. *Коробов П. Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: Учебник / П. Н. Коробов. – 3-е изд., перераб. и допол. – С.-Пб. : ДНК, 2006. – 376 с.*

16. *Кучма М. І. Математичне програмування: приклади і задачі : навч. посіб. Львів : Новий Світ-2000, 2011. 344 с. (Вища освіта в Україні).*

17. Красс М. С. Математика для экономических спеціальностей / М. С. Красс. – М. ИНФРА, 1998. – 464 с.
18. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование / А. В. Лотов. – М. : Наука, 1984. – 39 с.
19. *Магнус Я. Р. Эконометрика: навч. курс. Учебник / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – 7-е изд., испр. – М. : Дело, 2005. – 504 с.*
20. *Наконечний С. І. Економетрія: Підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – 3-тє вид., доп. та перероб. – К. : КНЕУ, 2005. – 520 с.*
21. Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели / В. С. Немчинов. – М. : Наука, 1967.
22. 11. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А. Задачи и упражнения по численным методам : Учеб. пособие. 3-е изд., стер. М : КомКнига, 2007. 208с.*
23. Солодовников А. С. Математика в экономике / А. С. Солодовников. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 220 с.
24. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / В. В. Степанюк. – К. : Вища шк., 1984.
25. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Хедли. – М.: Мир, 1967. – 506 с.
26. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях / Д. Хейс. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 225 с.
27. *Шапкин А. С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: учеб. пособие / А. С. Шапкин. – 4-е изд. – М. : Дашков и Ко, 2007. – 432 с.*
28. Экономико-математическое моделирование: Учебник / Л. В. Абланская, Л. О. Бабешко, Л. И. Баусов и др.; под ред. И. Н. Дрогобыцкого. – 2-е изд., стер. – М. : Экзамен, 2006. – 798 с.

Інтернет ресурси (джерела)

a. Дистанційний курс в системі MOODLE «Економіко-математичне моделювання» [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://sun.vtei.com.ua/course/view.php?id=99
b. Електронна бібліотека підручників [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://studentam.kiev.ua/content/category/3/72/80/
c. Лучшие книги по экономике [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://ubooks.com.ua/books/000114/inx.php